

Gegeben:  $l_0, x_0, y_0, m_0, m_1, m_2$

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \cdot y_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot y_2'^2 + \frac{1}{2} m_0 \cdot (y'^2 + x'^2) \quad \text{Kinetic Energy}$$

$$E_p = \mathbf{g} \cdot (-m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_0 \cdot y) \quad \text{Potentielle Energie}$$

Geometrische Beziehungen und Zwangsbedingungen:

Die linke Seite der Anordnung:

$$s_0^2 = y_0^2 + \frac{1}{4} l_0^2$$

$$y_1 = s_1 - s_0$$

$$s_1^2 = x^2 + y^2$$

Bewegung nach unten  $s_1 < s_0$

$$y_1 = \sqrt{x^2 + y^2} - s_0$$

Die rechte Seite der Anordnung:

$$y_2 = s_2 - s_0$$

$$s_2^2 = (l_0 - x)^2 + y^2$$

Bewegung nach unten  $s_2 < s_0$

$$y_2 = \sqrt{(l_0 - x)^2 + y^2} - s_0$$

Die generalisierte Koordinaten sind  $x$  und  $y$

$$y_1(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - s_0$$

$$y_2(t) = \sqrt{(l_0 - x(t))^2 + y(t)^2} - s_0$$

$$\frac{d}{dt} y_1(t) = \frac{x(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$$

$$\frac{d}{dt} y_2(t) = \frac{y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) - \frac{d}{dt} x(t) \cdot (l_0 - x(t))}{\sqrt{y(t)^2 + (l_0 - x(t))^2}}$$

Eingesetzt in die Energiegleichungen:

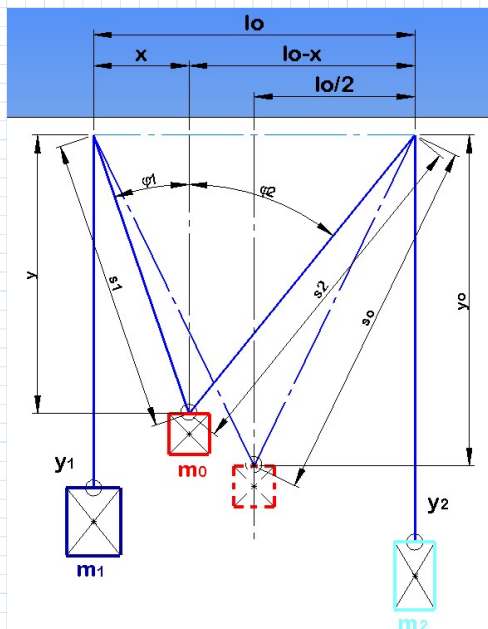
$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \cdot \left( \frac{x(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \left( \frac{y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) - \frac{d}{dt} x(t) \cdot (l_0 - x(t))}{\sqrt{y(t)^2 + (l_0 - x(t))^2}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_0 \cdot (y'(t)^2 + x'(t)^2)$$

$$E_p = \mathbf{g} \cdot (-m_1 \cdot (\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - s_0) + m_2 \cdot (\sqrt{(l_0 - x(t))^2 + y(t)^2} - s_0) + m_0 \cdot y(t))$$

$$L = E_k - E_p$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \cdot \left( \frac{x(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \left( \frac{y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) - \frac{d}{dt} x(t) \cdot (l_0 - x(t))}{\sqrt{y(t)^2 + (l_0 - x(t))^2}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_0 \cdot (y'(t)^2 + x'(t)^2) - \mathbf{g} \cdot (-m_1 \cdot (\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - s_0) + m_2 \cdot (\sqrt{(l_0 - x(t))^2 + y(t)^2} - s_0) + m_0 \cdot y(t))$$

$$\frac{dL}{dx'(t)} = \left( m_0 + \frac{2 \cdot m_2 \cdot (l_0 - x(t))^2}{2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2} + \frac{2 \cdot m_1 \cdot x(t)^2}{2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2} \right) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + \frac{2 \cdot m_1 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t)}{2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2} - \frac{2 \cdot m_2 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \cdot (l_0 - x(t))}{2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2}$$



$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dx'(t)} = \left( \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \cdot \left( m_0 + \frac{2 \cdot m_2 \cdot (l_0 - x(t))^2}{2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2} + \frac{2 \cdot m_1 \cdot x(t)^2}{2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2} \right) - \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) \cdot \left( \frac{4 \cdot m_2 \cdot \frac{d}{dt} x(t) \cdot (l_0 - x(t))}{2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2} + \frac{2 \cdot m_2 \cdot \left( 4 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) - 4 \cdot \frac{d}{dt} x(t) \cdot (l_0 - x(t)) \right) \cdot (l_0 - x(t))^2}{(2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2)^2} - \frac{4 \cdot m_1 \cdot x(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t)}{2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2} + \frac{2 \cdot m_1 \cdot x(t)^2 \cdot \left( 4 \cdot x(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + 4 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \right)}{(2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2)^2} \right) + \frac{2 \cdot m_1 \cdot x(t) \cdot \left( \frac{d}{dt} y(t) \right)^2}{2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2} - \frac{2 \cdot m_2 \cdot \left( \frac{d}{dt} y(t) \right) \cdot (l_0 - x(t))}{2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2} - \frac{2 \cdot m_2 \cdot y(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2} y(t) \cdot (l_0 - x(t))}{2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2} + \frac{2 \cdot m_1 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2} y(t)}{2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2} + \frac{2 \cdot m_1 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t)}{2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2} - \frac{2 \cdot m_2 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t)}{2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2} - \frac{2 \cdot m_1 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \cdot \left( 4 \cdot x(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + 4 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \right)}{(2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2)^2} + \frac{2 \cdot m_2 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \cdot \left( 4 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) - 4 \cdot \frac{d}{dt} x(t) \cdot (l_0 - x(t)) \right) \cdot (l_0 - x(t))}{(2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2)^2}$$

$$\frac{dL}{dx(t)} = g \cdot \left( \frac{m_2 \cdot (2 \cdot l_0 - 2 \cdot x(t))}{2 \cdot \sqrt{(l_0 - x(t))^2 + y(t)^2}} + \frac{m_1 \cdot x(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} \right) + \frac{m_2 \cdot (4 \cdot l_0 - 4 \cdot x(t)) \cdot \left( \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) \cdot (l_0 - x(t)) - y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \right)}{(2 \cdot (l_0 - x(t))^2 + 2 \cdot y(t)^2)^2} - \frac{2 \cdot m_2 \cdot \frac{d}{dt} x(t) \cdot \left( \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) \cdot (l_0 - x(t)) - y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \right)}{2 \cdot (l_0 - x(t))^2 + 2 \cdot y(t)^2} + \frac{2 \cdot m_1 \cdot \frac{d}{dt} x(t) \cdot \left( x(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \right)}{2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2} - \frac{4 \cdot m_1 \cdot x(t) \cdot \left( x(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \right)}{(2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2)^2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dx'(t)} - \frac{dL}{dx(t)} = 0$$

DGL für die x-Richtung:

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) \cdot \left( m_0 + \frac{2 \cdot m_2 \cdot (l_0 - x(t))^2}{2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2} + \frac{2 \cdot m_1 \cdot x(t)^2}{2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2} \right) - \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) \cdot \left( \frac{4 \cdot m_2 \cdot \frac{d}{dt} x(t) \cdot (l_0 - x(t))}{2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2} + \frac{2 \cdot m_2 \cdot \left( 4 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) - 4 \cdot \frac{d}{dt} x(t) \cdot (l_0 - x(t)) \right) \cdot (l_0 - x(t))^2}{(2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2)^2} - \frac{4 \cdot m_1 \cdot x(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t)}{2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2} + \frac{2 \cdot m_1 \cdot x(t)^2 \cdot \left( 4 \cdot x(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + 4 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \right)}{(2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2)^2} \right) + \frac{2 \cdot m_1 \cdot x(t) \cdot \left( \frac{d}{dt} y(t) \right)^2}{2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2} - \frac{2 \cdot m_2 \cdot \left( \frac{d}{dt} y(t) \right) \cdot (l_0 - x(t))}{2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2} - \frac{2 \cdot m_2 \cdot y(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2} y(t) \cdot (l_0 - x(t))}{2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2} + \frac{2 \cdot m_1 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2} y(t)}{2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2} + \frac{2 \cdot m_1 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t)}{2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2} - \frac{2 \cdot m_2 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t)}{2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2} - \frac{2 \cdot m_1 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \cdot \left( 4 \cdot x(t) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + 4 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \right)}{(2 \cdot x(t)^2 + 2 \cdot y(t)^2)^2} + \frac{2 \cdot m_2 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \cdot \left( 4 \cdot y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) - 4 \cdot \frac{d}{dt} x(t) \cdot (l_0 - x(t)) \right) \cdot (l_0 - x(t))}{(2 \cdot y(t)^2 + 2 \cdot (l_0 - x(t))^2)^2} \right) = 0$$