Журнал «Информатика в школе», № 10, 2016 г.

ИНФОРМАТИКА, АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ: ЧЕТЫРЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ С ПОКЕМОНОМ

В. Ф. Очков, Альваро Диаз Фалькони

Сайт статьи: https://www.ptcusercommunity.com/thread/137953

Если спросить школьников или студентов, что такое *парабола*, то почти все скажут, что это линия, отображающая на графике квадратное уравнение. И только единицы вспомнят, что парабола — это геометрическое место точек на плоскости с определенным свойством [5]. С *окружностью* ситуация обратная. Все помнят про точки на плоскости, равноудаленные от центра окружности, но мало кто сходу напишет алгебраическое выражение, по которому строится окружность на декартовом графике.

Давайте рассмотрим «геометрическое», а не «алгебраическое» определение параболы и построим ее график, опираясь не на квадратный полином, а на «поточечное» определение параболы.

Если на плоскости провести прямую линию и поставить около нее точку, то парабола будет состоять из точек, равноудаленных от прямой линии (от *директрисы* параболы) и от заданной точки (от *фокуса* параболы). Такое поточечное построение параболы несложно сделать на бумаге, взяв в руки карандаш, циркуль и угольник: раздвигаем циркуль на определенный угол (рис. 1), ставим его иглу в точке-фокусе и чертим дугу окружности. Затем с помощью угольника проводим под прямым углом от директрисы к дуге прямую линию так, чтобы на дуге окружности поставить точку, равноудаленную от фокуса и директрисы. Далее меняем угол раскрытия циркуля и повторяем все сначала, проставляя на графике все новые и новые точки будущей параболы.

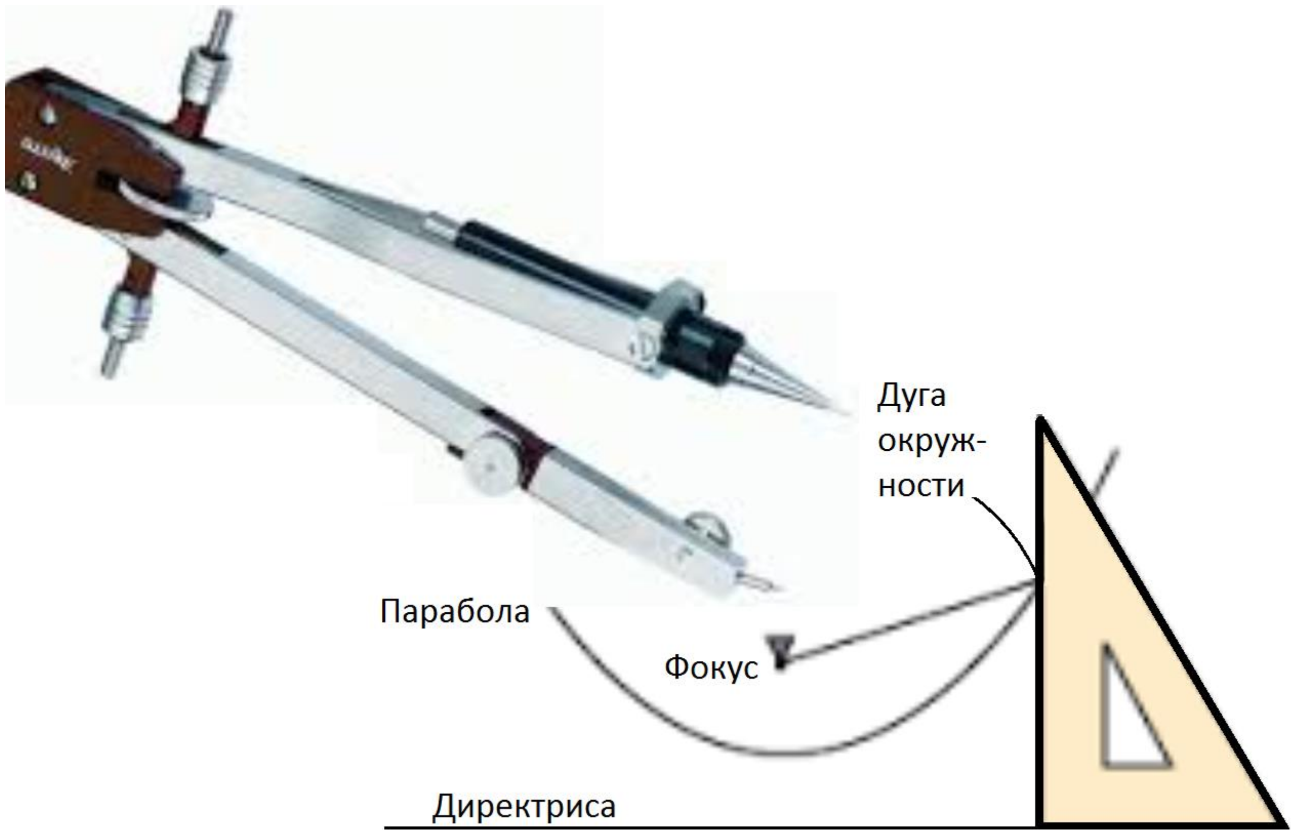


Рис. 1. Построение параболы циркулем и угольником

Но современные школьники и студенты, увы, постепенно отучаются работать с реальными чертежными инструментами, так как все можно начертить на экране компьютера, а затем перенести начерченное на бумагу 2D-принтера или даже «вылепить» модель на 3D-принтере.

Компьютер с его быстродействием и точностью в сочетании с нашей смекалкой позволяет строить любые кривые простым сканированием заданной прямоугольной области x_1—x_2—y_1—y_2, опираясь на «поточечное», а не на формульное определение кривой. Это будет, как говорил один киноперсонаж[1], «неэстетично, зато дешево, надежно и практично» [1]. Давайте же построим таким сканированием несколько кривых — уже известных и еще не исследованных.

На рисунке 2 показан Mathcad-документ, по которому сканированием строится парабола с фокусом в точке с координатами (x_F, y_F) и с «горизонтальной» директрисой, отстоящей от оси X на расстояние Dir. Фокус на рисунке 2 имеет координату x_F, равную нулю, но можно задавать и другие значения. Директрису в общем случае можно провести под любым углом к оси X: программа на рисунке 2 несколько усложнится в плане расчета переменной $L2$ — расстояния от директрисы до точки на параболе, а сама парабола при этом «свернется на бок». Формулу для $L2$ легко найти в Интернете по ключу «Расстояние от точки до прямой». Это решение мы поместили на сайте статьи.

---

[1] Лелик в исполнении Папанова из «Бриллиантовой руки»

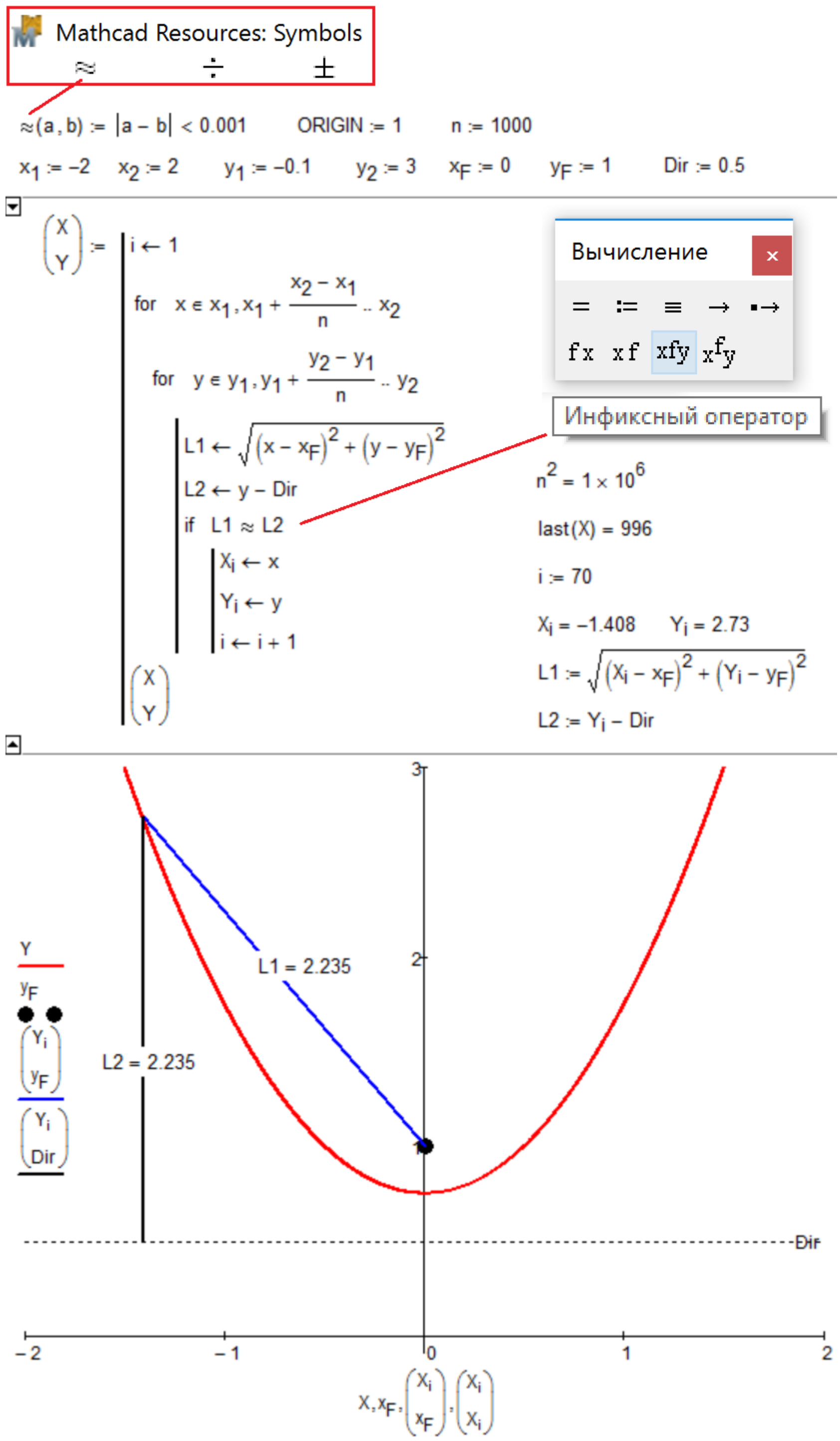


Рис. 2. Построение параболы

В программе на рисунке 2 циклом for с параметром x, в который вложен второй цикл for с параметром y, перебираются точки в прямоугольной области от x_1 до x_2 с шагом $\frac{x_2 - x_1}{n}$ и от y_1 до y_2 с шагом $\frac{y_2 - y_1}{n}$. Переменные x_1, x_2, y_1 и y_2, как и другие нужные для расчета величины, задаются заранее. Значение целочисленной переменной n можно менять, добиваясь компромисса между точностью и длительностью вычислений. В двойном цикле for вычисляются расстояние $L1$ от текущей точки с координатами x и y до фокуса и расстояние $L2$ от текущей точки до директрисы. Если (if) расстояния $L1$ и $L2$ окажутся равными[2], то координаты текущей точки заносятся в векторы X и Y, длина которых при этом увеличивается на единицу ($i \leftarrow i + 1$, где i — это индекс векторов X и Y). Затем векторы X и Y отображаются на графике в виде искомой кривой, состоящей из точек. Если этих точек достаточно много, то они сливаются в линию. Там же на графике отмечен фокус параболы, ее директриса и отрезки $L1$ и $L2$ для одной из выбранных точек на параболе.

Задание: начертить параболу (см. рис. 2), когда директриса расположена под произвольным углом к оси X.

Фокус параболы, о котором, повторяем, многие школьники забывают, помня (да и то, увы, не всегда) только квадратное уравнение параболы, имеет очень важный физический смысл. Если на нашу параболу сверху пустить параллельный пучок лучей, то они, отразившись от параболы (угол падения равен углу отражения), сойдутся в фокусе [3]. Это свойство данной кривой используется в параболических антеннах, в фокусе которых помещают приемник радиосигналов[3]. Некоторые ошибочно полагают, что в сечениях таких антенн «сидит» не парабола, а *гипербола*. Виной тому знаменитый роман А. Н. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина». Гиперболу с параболой роднит еще и то, что школьники опять же в первую очередь связывают гиперболу не с геометрией точек, ее образующих, а с алгеброй, в частности, с простейшей «школьной» формулой гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$. Объединяет параболу с гиперболой и то, что фокус есть и у гиперболы — фокусов у гиперболы два.

На рисунке 3 показано построение гиперболы с опорой на ее геометрическое, а не алгебраическое определение.

---

[2] Вернее, примерно равными: мы задачу решаем численно, следовательно, приближенно. Первым оператором в документе на рисунке 2 введена функция пользователя «примерно равно» (символ $\approx$ берется из Ресурсов Mathcad – см. начало рис. 21), которая в двойном цикле перебора для лучшей наглядности вызывается в виде инфиксного оператора — в принятом в математике написании.

[3] Параболу, вернее, параболоид (поверхность, полученную вращением параболы вокруг оси, перпендикулярной директрисе и проходящей через фокус) можно увидеть не только на стенах домов, где смотрят спутниковое телевидение, но и… зимой на ледяных горках. Рассказывают, что когда-то давно одному заводу, выпускающему параболические антенны для нужд военных, поручили изготавливать конверсионную продукцию. Руководство завода, недолго думая, решило прикрепить к этой тарелке две кожаные петли. Получилась отличная ледянка. А вот еще один возможный товар народного потребления «с параболой внутри»: стеклянная или фарфоровая ваза для фруктов в виде параболоида с круглой подставкой-директрисой и ножкой, пронизывающей в центре сам параболоид и заканчивающейся в фокусе ручкой-шаром. Такая ваза хорошо смотрелась бы в доме математика — будет, о чем поговорить с гостями за столом. Ее можно расписать не традиционными узорами, а математическими выкладками, связанными с параболой.

$\approx(a,b) := |a-b| < 0.001$ ORIGIN $:= 1$ $n := 10000$

$x_1 := -2$ $x_2 := 2$ $y_1 := -2$ $y_2 := 2$

$x_{F1} := -0.5$ $y_{F1} := -0.5$ $x_{F2} := 0.5$ $y_{F2} := 0.5$ $a := 1$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \left|\begin{array}{l} i \leftarrow 1 \\ \text{for } x \in x_1, x_1 + \dfrac{x_2 - x_1}{n} .. x_2 \\ \quad \text{for } y \in y_1, y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{n} .. y_2 \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \sqrt{(x - x_{F1})^2 + (y - y_{F1})^2} \\ L2 \leftarrow \sqrt{(x - x_{F2})^2 + (y - y_{F2})^2} \\ \text{if } |L1 - L2| \approx a \\ \quad \left| \begin{array}{l} X_i \leftarrow x \\ Y_i \leftarrow y \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

$n^2 = 100 \times 10^6$

$\mathrm{last}(X) = 99948$

$i := 10000$

$X_i = -1.55$ $Y_i = -0.079$

$L1 := \sqrt{(X_i - x_{F1})^2 + (Y_i - y_{F1})^2}$

$L2 := \sqrt{(X_i - x_{F2})^2 + (Y_i - y_{F2})^2}$

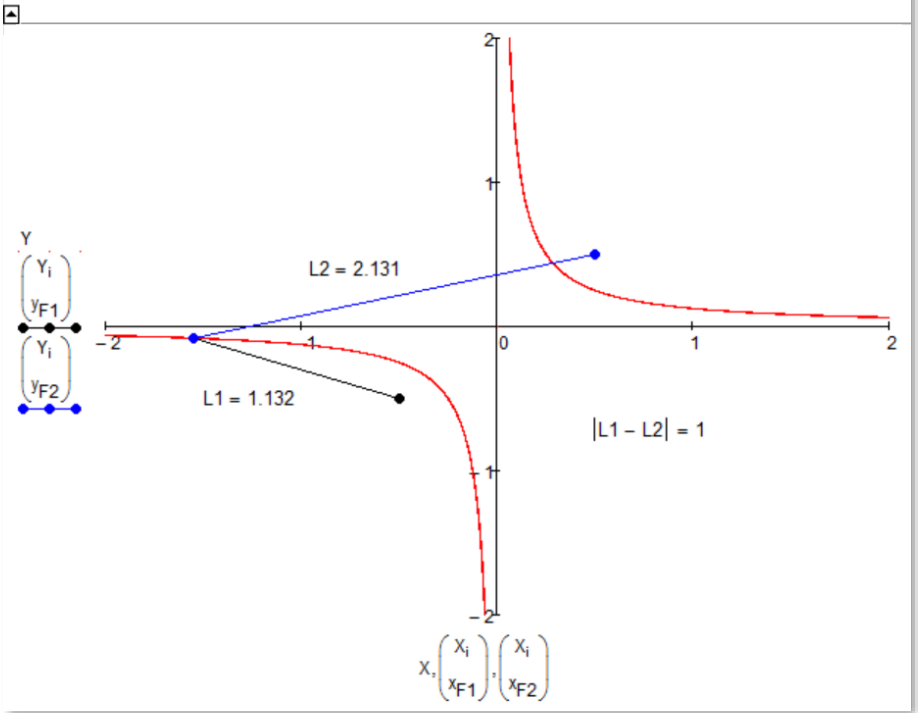


Рис. 3. Построение гиперболы

Гипербола — это геометрическое место точек, модуль *разности* расстояний от которых до двух фокусов является постоянной величиной (у нас это параметр a). В программе на рисунке 3 это определение записано как $|L1 - L2| = a$. Но это выражение можно разбить на два: $L1 - L2 = a$ и $L2 - L1 = a$, которые будут формировать две отдельные ветви гиперболы с двумя фокусами соответственно.

Если разность расстояний точек кривой от двух фокусов заменить на *сумму*, то две ветви такой гиперболы свернутся в *эллипс*. Если же у эллипса два фокуса сместить в один, то получится *окружность* с диаметром a.

Задание: Построить эллипс с двумя фокусами и окружность с одним фокусом (центром).

Но окружность можно построить и с двумя фокусами, используя *деление* $\frac{L1}{L2} = a$ или $\frac{L2}{L1} = a$. Это будут так называемые ***окружности Аполлония***. Мы не показываем здесь рисунки с построением эллипса и окружности, читатель может выполнить их сам, слегка подправив расчет на рисунке 3: заменив выражение $|L1 - L2|$ (гипербола) на $L1 + L2$ (эллипс) или $\frac{L1}{L2}$ (окружность[4]).

Задание: Построить окружности Аполлония.

Параболу, гиперболу, эллипс и окружность (частный случай эллипса) называют ***коническими кривыми***, так как они получаются при пересечении плоскости с прямым круговым конусом. Если же иметь в виду алгебру, а не геометрию, то парабола, гипербола, эллипс и окружность — это плоские ***кривые второго порядка***, описываемые уравнением $a + bx + cx^2 + dy + ey^2 + fxy = 0$. Если, например, $a = -1$, $f = 1$, а остальные коэффициенты равны нулю, то получится простейшее уравнение гиперболы, показанное выше[5]. Уравнения для параболы, гиперболы, эллипса и окружности можно свести к так называемому *каноническому виду*, в котором останутся только два коэффициента (у параболы останется только один коэффициент). Еще эти кривые условно называют ***космическими***, так как планеты и их спутники летают по траекториям, близким к окружности или эллипсу. Так и говорят: эллиптическая орбита, круговая орбита… «Беззаконные» кометы часто движутся по гиперболе [2]. А на Земле за всеми этими «космическими телодвижениями» следят с помощью зеркал параболической формы оптических телескопов и радиотелескопов (см. сноску 2).

Эллипс и гиперболу, кстати говоря, можно построить по методике, показанной на рис. 1. Нужно будет только отрезки, откладываемые циркулем и линейкой, делать не равны-

---

[4] Задавая два фокуса и значение параметра a, мы можем получить две окружности: одну для равенства $\frac{L1}{L2} = a$ и вторую для равенства $\frac{L2}{L1} = a$. Если к этим окружностям от фокусов прочертить по паре отрезков $L1$ и $L2$ так, как это показано на рисунке 2, то мы получим… два колеса и раму [4]. У Аполлона есть колесница, которую можно видеть на фронтоне Большого театра в Москве или на сторублевых купюрах. У Аполлония же есть, вернее, теперь есть… велосипед (a bicycle — «двухколесник»), который получается при построении четырех отрезков прямых и двух окружностей, названных в честь этого древнегреческого математика (262 до н. э. — 190 до н. э.). Он, кстати, ввел в обиход термин «гипербола». **Задание**: Построить «велосипед» Аполлония.

[5] Наш способ построения графиков сканированием плоскости годится и для работы с уравнениями кривых, заданных в виде $y = f(x)$ или $f(x, y) = 0$. Достаточно после слова if вставить не равенство отрезков, а уравнение исследуемой кривой, используя в нем не оператор «равно», а оператор «примерно равно» [4].

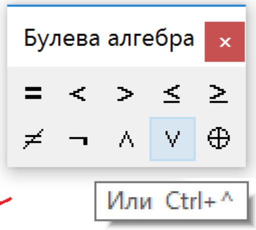
ми, а отличающимися на некую константу, называемую *эксцентриситетом* (ε) На рисунке 4 показано построение гиперболы, параболы и эллипса сканированием. У эллипса ε < 1, у параболы ε = 1, а у гиперболы ε > 1.

$$\approx(a,b) := |a-b| < 0.001 \qquad \mathrm{ORIGIN} := 0 \qquad n := 3000$$

$$x_1 := -2 \qquad x_2 := 2 \qquad y_1 := -0.4 \qquad y_2 := 2$$

$$x_F := 0 \qquad y_F := 1 \qquad \mathrm{Dir} := 0.5$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow 0 \\ \text{for } \ x \in x_1, x_1 + \dfrac{x_2 - x_1}{n} .. x_2 \\ \quad \text{for } \ y \in y_1, y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{n} .. y_2 \\ \qquad \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} \\ L2 \leftarrow y - \mathrm{Dir} \\ \text{if } \left| \begin{array}{l} \text{"Parabola"} \\ \varepsilon \leftarrow 1 \\ L1 \approx |\varepsilon \cdot L2| \end{array} \right. \vee \left| \begin{array}{l} \text{"Hyperbola"} \\ \varepsilon \leftarrow 3 \\ L1 \approx |\varepsilon \cdot L2| \end{array} \right. \vee \left| \begin{array}{l} \text{"Ellipse"} \\ \varepsilon \leftarrow 0.5 \\ L1 \approx |\varepsilon \cdot L2| \end{array} \right. \\ \quad \left| \begin{array}{l} X_i \leftarrow x \\ Y_i \leftarrow y \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{array} \right.$$



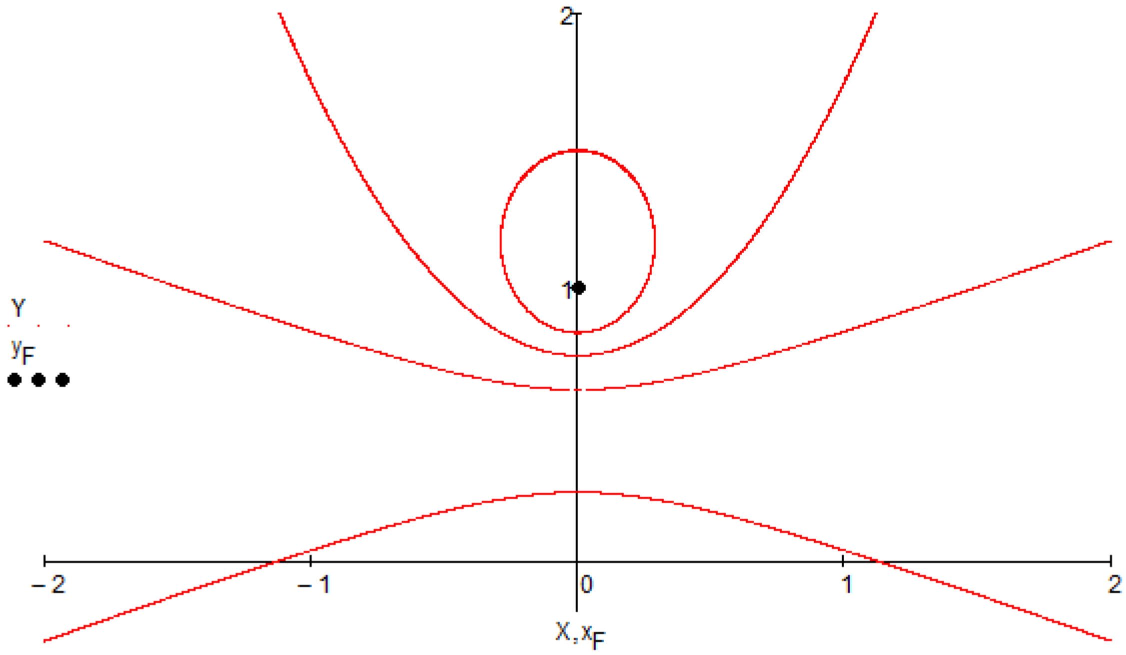


Рис. 4. Построение гиперболы, параболы и эллипса (анимация: https://www.ptcusercommunity.com/thread/140084)

Итак, гипербола — это *вычитание*, эллипс — *сложение*, а окружность — *деление*. Парабола же — это переходный случай от гиперболы к эллипсу, от вычитания к сложению. А какая геометрия скрывается за четвертым арифметическим действием — за *умножением*? Это так называемые ***овалы Кассини***, которые также несложно построить, используя нашу сканирующую методику. На рисунке 5 показаны эти овалы при фиксированных координатах двух фокусов и при трех разных значениях параметра a — произведения $L1$ на $L2$. Программу построения овалов Кассини мы не показываем: будет достаточно, как уже отмечено ранее, в программе на рисунке 3 знак вычитания заменить на знак умножения.

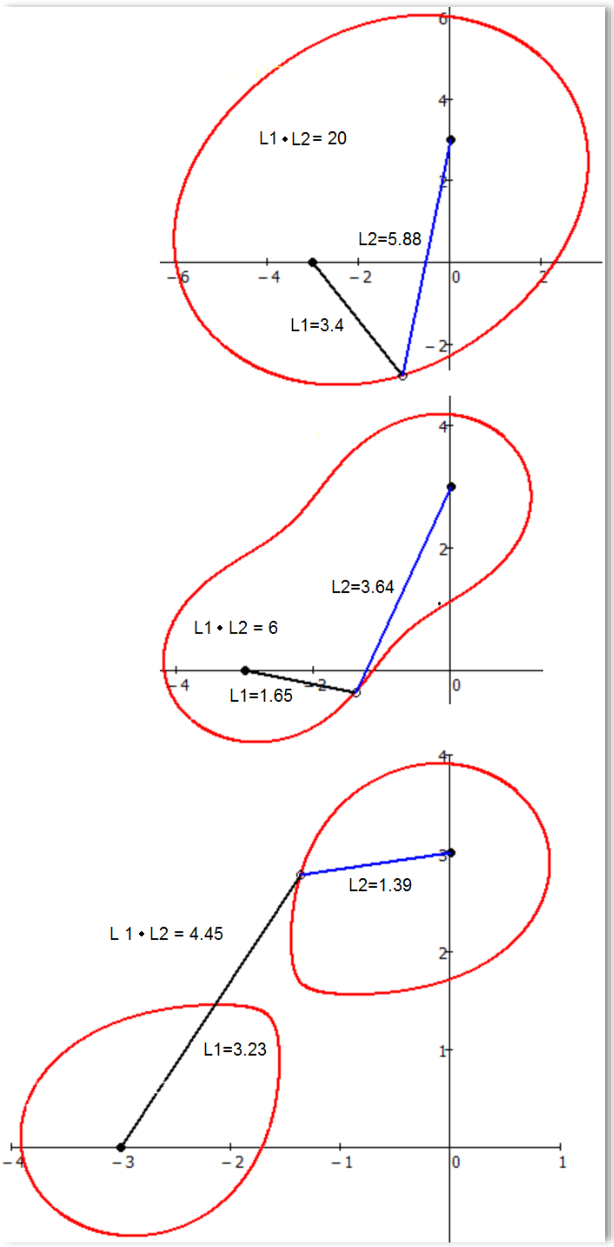


Рис. 5. Овалы Кассини

Овалом (слегка деформированным эллипсом[6]) замкнутую кривую на рисунке 5 можно назвать весьма условно. Уменьшение значения параметра a приводит к тому, что у этого овала появляется «талия» (см. центральную кривую на рисунке 5), которая при дальнейшем уменьшении значения параметра a «рвет» эту плоскую фигуру на две половинки. Анимация этого процесса напоминает деление живой клетки. Было время, когда полагали, что спутники вращаются вокруг планет не по эллиптическим орбитам, а по орбитам, подобным той, какая показана вверху рисунка 5 — по овалу Кассини. Вернее, велись дискуссии по этому поводу, в которых активно участвовал итальянский математик Джованни Доменико Кассини (1625 — 1712). Но в конце концов было доказано, что тут «работает» эллипс.

Кривые с двумя фокусами, о которых рассказано выше, всесторонне изучены [5]. Для них, в частности, найдены аналитические выражения, позволяющие строить эти кривые без «неэстетичного» сканирования. Но у подобных кривых может быть более двух полюсов. Вот тут-то и пригодится наше «дешевое, надежное и практичное» сканирование!

Но сначала давайте еще немного порисуем на бумаге, а не на экране компьютера.

Эллипс, как известно, можно нарисовать с помощью карандаша и веревочки, закрепленной с двух концов у фокусов эллипса. Этот нехитрый способ несложно применить для рисования замкнутой кривой и с тремя фокусами — см. рисунок 6.

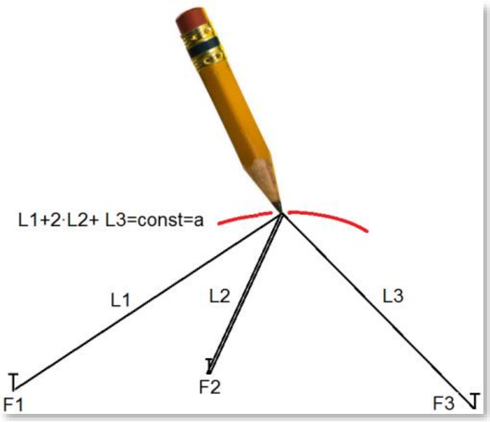


Рис. 6. Рисование эллипса с тремя фокусами

Задание: Построить эллипс с тремя и с более чем тремя фокусами

Можно предложить школьникам следующую **лабораторную работу, охватывающую алгебру, геометрию и информатику**.

На чертежной доске крепится ватман, на котором отмечаются три точки-фокуса $F1$, $F2$ и $F3$, куда втыкаются булавки. Веревочка одним концом завязывается на первой булавке

[6] Овалом (an oval) в англоязычной математической литературе называют любую замкнутую плоскую кривую. В русском же языке овал — это сугубо выпуклая фигура с гладкими краями. В доме математика, упомянутого в сноске 2, можно повесить овальное зеркало, сделанное в виде эллипса, большой и малый диаметры которого имеют пропорции золотого сечения.

в точке $F1$, перекидывается через грифель карандаша, перекидывается через булавку, воткнутую в точку $F2$, еще раз перекидывается через грифель карандаша и завязывается на третьей булавке в точке $F3$. Двигая карандаш и натягивая веревочку (а она у нас нерастяжимая: $L1 + 2 \cdot L2 + L3 = a$, где а — длина веревочки), рисуем некую кривую линию. Ее можно замкнуть, прорисовав кривую сверху и снизу фокусов. Все это аккуратно фотографируется и отправляется на экран компьютера, где оцифровывается: определяются координаты точек-фокусов и нескольких точек на кривой. Затем эта кривая строится на компьютере уже описанным нами программным способом. Завершается эта лабораторная работа сравнением двух кривых: реальной, продублированной на экране компьютера и на которой проставлены точки, и виртуальной, созданной по вышеописанным программам.

Наш способ черчения на бумаге замкнутых кривых можно усложнить — брать не три, а большее число фокусов и по-разному перекидывать веревочку через булавки и карандаш. Главное тут, чтобы силы трения веревочки о булавки не помешали плавному движению грифеля карандаша по бумаге. Если же сложение[7] заменить на умножение, то придется ограничиться только виртуальной кривой на экране дисплея. Пока еще никому не удалось нарисовать на бумаге кривую с несколькими фокусами и с опорой на произведение, а не на сумму. Но это, повторяем, несложно сделать на экране компьютера по нашей сканирующей методике. Вот мы наконец-то и подобрались к обещанному в заголовке *покемону* — объекту компьютерной сетевой игры, суть которой довольно примитивна: имеются «геометрические места точек» на карте мира, на плане города, которые играющие должны определить, т. е. «поймать покемона[8]». Игра незамысловатая, но вокруг нее бушуют такие общественно-политические страсти…

Овалы Кассини, в основе которых лежит произведение длин отрезков, также могут иметь более двух фокусов[9]. Располагая их в разных местах плоскости и задавая разные значения произведения, можно получить довольно сложные замкнутые кривые, оконтуривающие занимательные фигурки[10]. На рисунке 7 показаны три этапа трансформации овалов Кассини, обрисовывающих… покемона с девятью фокусами: уши, глаза, руки, ноги и пупок. Фокусы-глаза дополнительно обведены кружочками.

---

[7] Эллипсы (замкнутые кривые с суммированием) с более чем двумя фокусами называют ***k*-эллипсами**. Впервые их исследовал для $k = 3$ немецкий философ, математик и экспериментатор Эренфрид Вальтер фон Чирнхаус (1651–1708) [4].

[8] На рисунке 4 можно узреть еще одного компьютерного «зверя» ─ жука.

[9] Тогда говорят о ***лемнискатах***. Наиболее известна двухфокусная лемниската Бернулли, где произведение длин отрезков равно квадрату половины расстояния между фокусами. В этом случае две половинки овала Кассини (см. рис. 5) касаются друг друга в точке.

[10] На авторской анимации, адрес которой отмечен на сайте статьи [6], показана лемниската с пятью фокусами, напоминающая высыхающее озеро: единый овал уменьшается в размерах, разбивается на отдельные водоемы, которые в конце концов превращаются в точки. Параметр этой анимации — значение произведения длин отрезков, изменяющееся от некой положительной величины до нуля.

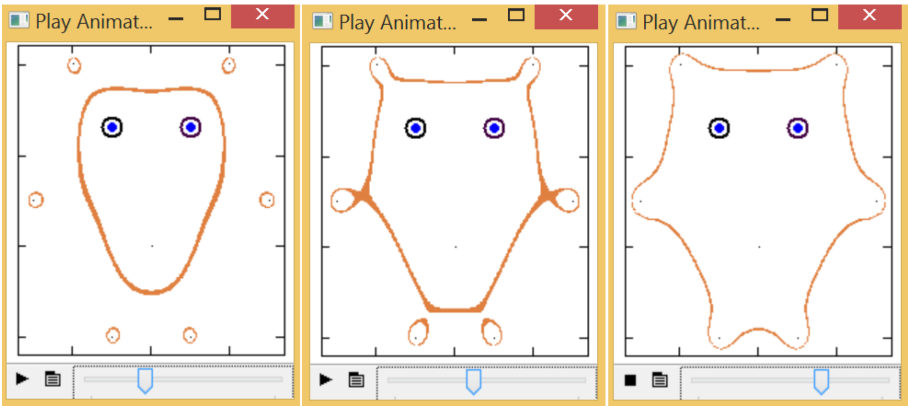


Рис. 7. Покемон Кассини (анимация https://www.ptcusercommunity.com/message/458980)

Выводы.

1. Сложные кривые можно рисовать примитивным сканированием прямоугольных областей. Так, кстати, поступает и сам компьютер, выводя на дисплей растровую картинку.

2. Сложные кривые можно попытаться сначала нарисовать на бумаге, а потом сравнить нарисованное с его компьютерным аналогом.

3. Виртуального зверя-покемона можно «поймать», не только бегая как угорелый со смартфоном по городам и весям, но и изучая алгебру, геометрию и информатику. Можно попытаться нарисовать и других «зверей», заложив в них несколько фокусов и разные алгебраические зависимости.

Интернет-источники

1. *Очков В. Ф.* История одного шедевра // Компьютерные инструменты в образовании. 2000. № 3–4. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Lace/Lace.htm

2. *Очков В. Ф., Боголомова Е. П., Иванов Д. А., Писачич К.* Движения планет: расчет и визуализация в среде Mathcad, или Часы Кеплера // Cloud of Science. 2015. Т. 2. № 2. 2015. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Planets.pdf

3. *Очков В. Ф., Соколов А. В., Калова Я., Чудова Ю. В.* Литературно-физическая композиция «Истории о зеркале и линзе» // Открытое образование. 2016. № 1. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mirror-Lens.pdf

4. *Очков В. Ф., Диаз Фалькони А.* Семь вычислительных кривых, или Велосипед Аполлония // Cloud of Science. 2016. Т. 3. № 3. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/7-curves.pdf

5. *Савелов А. А.* Плоские кривые: систематика, свойства, применение. М.: Физматлит, 1960. http://www.vixri.ru/?p=3793