Beispiel 1: Schwingersystem

$$F(t) := F_0$$

$$x''(t) + \frac{B}{m} \cdot x'(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = \frac{F(t)}{m}$$

DGL im Zeitbereich

$$f(s) := F(t) \xrightarrow{laplace, t} \frac{F_0}{s}$$

Laplace Transformation der Störfunktion

Die Lösung der DGL erhält man damit, indem man nach "X" auflöst (Integral der Bildfunktion) und Rücktransformiert.

$$x(t) := (s^2 \cdot X) + \frac{B}{m} \cdot (s \cdot X) + \frac{k}{m} \cdot X = f(s) \xrightarrow[simplify]{solve, X \atop invlaplace, s} -\frac{B \cdot F_0 \cdot e^{-\frac{B \cdot t}{2 \cdot m}} \cdot \sinh\left(t \cdot \sqrt{\frac{B^2 - 4 \cdot k \cdot m}{4 \cdot m^2}}\right) - 2 \cdot m \cdot F_0 \cdot \sqrt{\frac{B^2 - 4 \cdot k \cdot m}{4 \cdot m^2}} + 2 \cdot m \cdot F_0 \cdot e^{-\frac{B \cdot t}{2 \cdot m}} \cdot \cosh\left(t \cdot \sqrt{\frac{B^2 - 4 \cdot k \cdot m}{4 \cdot m^2}}\right) \cdot \sqrt{\frac{B^2 - 4 \cdot k \cdot m}{4 \cdot m^2}}}{k \cdot \sqrt{\frac{B^2 - 4 \cdot k \cdot m}{m^2}}}$$

Lösung des Systems:

$$x(t) = \left(1 - e^{-\frac{B \cdot t}{2 \cdot m}} \cdot \left(\cosh\left(\frac{t}{2} \cdot \sqrt{\frac{B^2}{m^2} - \frac{4 \cdot k}{m}}\right) + \frac{B}{m \cdot \sqrt{\frac{B^2}{m^2} - \frac{4 \cdot k}{m}}} \cdot \sinh\left(\frac{t}{2} \cdot \sqrt{\frac{B^2}{m^2} - \frac{4 \cdot k}{m}}\right)\right)\right) \cdot \frac{F_0}{k}$$

Beispiel 2: Beliebige DGL ohne Anfangsbedingungen

$$a \cdot y''(t) + d\ y(t) = b \cdot t^2$$

$$f(s) := b \cdot t^2 \xrightarrow{laplace, t} \frac{2 \cdot b}{s^3}$$

$$y(t) := (s^2 \cdot X) + \frac{d}{a} \cdot (X) = \frac{f(s)}{a} \xrightarrow[factor]{solve, X \atop invlaplace, s} \frac{b \cdot \left(d \cdot t^2 - 2 \cdot a + 2 \cdot a \cdot \cos\left(t \cdot \sqrt{\frac{d}{a}}\right)\right)}{d^2}$$

$$y(t) = \frac{b}{d^2} \cdot \left(d \cdot t^2 - 2 \cdot a + 2 \cdot a \cdot \cos\left(t \cdot \sqrt{\frac{d}{a}}\right)\right)$$

Lösung der DGL

Beispiel 3: Abkühlung in Abhängigkeit der Umgebungstemperatur als Funktion der Zeit

$T'(t)+k\cdot T(t)=k\cdot U(t)$ $\qquad T(0)=T_0$

$U(t)=k\cdot(U_0+\alpha\cdot t)$

$$f(s):=k\cdot(U_0+\alpha\cdot t)\xrightarrow{laplace,t}\frac{k\cdot\alpha+s\cdot k\cdot U_0}{s^2}$$

Merke: Die Anfangsbedingungen werden **von den Termen mit den Ableitungen absteigend** subtrahiert.

$$T(t):=\left(s^1\cdot T-s^0\cdot T_0\right)+k\cdot T=f(s)\xrightarrow[invlaplace,s]{solve,\boldsymbol{T}}\frac{\alpha\cdot e^{-(t\cdot k)}-\alpha+k\cdot U_0+t\cdot k\cdot\alpha+k\cdot T_0\cdot e^{-(t\cdot k)}-k\cdot U_0\cdot e^{-(t\cdot k)}}{k}$$

$$T(t)\xrightarrow{expand}U_0-\frac{\alpha}{k}+T_0\cdot e^{-(k\cdot t)}-U_0\cdot e^{-(k\cdot t)}+t\cdot\alpha+\frac{\alpha\cdot e^{-(k\cdot t)}}{k}$$

$$T(t)=\left(T_0-U_0+\frac{\alpha}{k}\right)\cdot e^{-(k\cdot t)}+U_0-\frac{\alpha}{k}+t\cdot\alpha$$

Beispiel 4: Beliebige DGL mit Anfangsbedingungen

$a\cdot y''(t)+d\cdot y(t)=b\cdot t^2$ $\qquad y(0)=y_0$ $\qquad y'(0)=m$

$$f(s):=b\cdot t^2\xrightarrow{laplace,t}\frac{2\cdot b}{s^3}$$

$$y(t):=a\cdot\left(s^2\cdot X-s^1\cdot y_0-s^0\cdot m\right)+d\cdot X=f(s)\xrightarrow[invlaplace,s]{solve,X}\frac{d^2\cdot m\cdot\sin\left(t\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}\right)-2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}+d^2\cdot y_0\cdot\cos\left(t\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}\right)\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}+b\cdot d\cdot t^2\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}+2\cdot a\cdot b\cdot\cos\left(t\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}\right)\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}}{d^2\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}}$$

$$y(t)=y_0\cdot\cos\left(t\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}\right)+\frac{m\cdot\sin\left(t\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}\right)}{\sqrt{\frac{d}{a}}}-\frac{2\cdot a\cdot b}{d^2}+\frac{b\cdot t^2}{d}+\frac{2\cdot a\cdot b\cdot\cos\left(t\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}\right)}{d^2}$$

$y(t) := k + t$

$F(s) := y(t) \xrightarrow{laplace,\,t} \frac{s\cdot k+1}{s^{2}}$

$g''(t) - u_0\cdot g'(t) + v_0\cdot g(t) = y(t)$

Mit den Anfangsbedingungen:

$g(0) = \alpha_0 \qquad g'(0) = -\xi_0$

$$g(t) := \left(s^{2}\cdot X - s\cdot\alpha_0 + \xi_0\right) - u_0\cdot\left(s\cdot X - \alpha_0\right) + v_0\cdot X = F(s) \xrightarrow{\substack{solve,\,X\\ invlaplace,\,s\\ factor}} \frac{u_0\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0} + t\cdot v_0\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0} + k\cdot v_0\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0} - 2\cdot v_0\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0}}{2}\right)\cdot e^{\frac{t\cdot u_0}{2}} + u_0^{2}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0}}{2}\right)\cdot e^{\frac{t\cdot u_0}{2}} - 2\cdot v_0^{2}\cdot\xi_0\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{u_0^{2}-}}{2}\right.}{}$$

Probe:

$g(0) = \alpha_0 \rightarrow 1$

$$g(t) = \frac{\begin{aligned}&u_0\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0} + t\cdot v_0\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0} + k\cdot v_0\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0} - 2\cdot v_0\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0}}{2}\right)\cdot e^{\frac{t\cdot u_0}{2}} + u_0^{2}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0}}{2}\right)\cdot e^{\frac{t\cdot u_0}{2}} - 2\cdot v_0^{2}\cdot\xi_0\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0}}{2}\right)\cdot e^{\frac{t\cdot u_0}{2}}\\ &- u_0\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0}}{2}\right)\cdot e^{\frac{t\cdot u_0}{2}}\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0} + k\cdot u_0\cdot v_0\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0}}{2}\right)\cdot e^{\frac{t\cdot u_0}{2}} - k\cdot v_0\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0}}{2}\right)\cdot e^{\frac{t\cdot u_0}{2}}\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0} - u_0\cdot v_0^{2}\cdot\alpha_0\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0}}{2}\right)\cdot e^{\frac{t\cdot u_0}{2}}\\ &+ v_0^{2}\cdot\alpha_0\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0}}{2}\right)\cdot e^{\frac{t\cdot u_0}{2}}\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0}\end{aligned}}{v_0^{2}\cdot\sqrt{u_0^{2}-4\cdot v_0}}$$