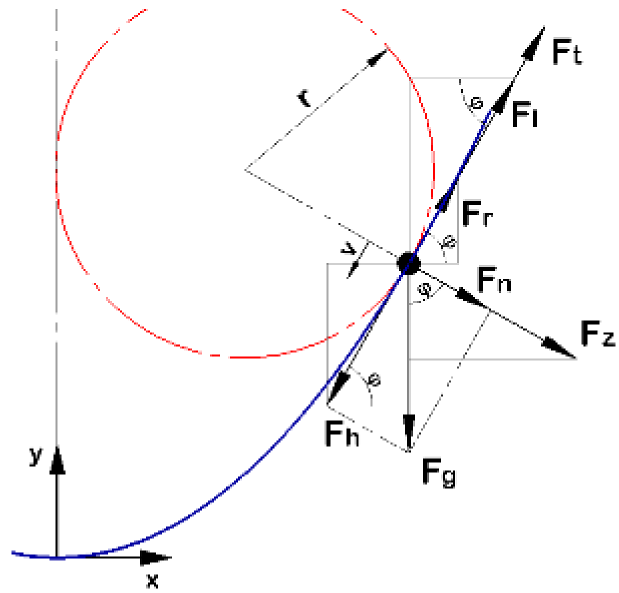
Eine punktförmige Masse wird am oberen Ende eines Parabelbogens aus der Ruhe losgelassen.
Wie sieht der Verlauf für Beschleunigung und Geschwindigkeit aus?
Die Bewegung erfolgt mit Reibung und Luftwiderstand.



$y(x) = \lambda \cdot x^2$ Parabelbahn

Ableitungen:

$\frac{d}{dx} y(x) = 2\lambda \cdot x \qquad \frac{d^2}{dx^2} y(x) = 2\lambda$

$y'(t) = 2\lambda \cdot x(t) \cdot x'(t)$

Es ist: $\varphi = \operatorname{atan}(2\lambda \cdot x)$

$F_r = (F_n + F_z) \cdot \mu \qquad F_n = m_k \cdot g \cdot \cos(\operatorname{atan}(2\lambda \cdot x))$

$$F_n = \frac{m_k \cdot g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}}$$

$$F_h = m_k \cdot g \cdot \frac{2 \cdot x \cdot \lambda}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}}$$

$F_z = m_k \cdot \frac{v^2}{r} \qquad v^2 = x'^2 + y'^2$ Zentrifugalkraft an der Ortskrümmung

$v^2 = x'^2 + 4\lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2$ resultierende Geschwindigkeit (=Bahngeschwindigkeit)

$r = \frac{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}}{2\lambda}$ Ortskrümmungsradius

$$F_z = 2\lambda \cdot m_k \cdot \frac{x'^2 + 4\lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2}{\sqrt{\left(1 + (2\lambda \cdot x)^2\right)^3}}$$

$F_l = k \cdot v^2 \qquad F_l = k \cdot \left(x'^2 + 4\lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2\right) \qquad k = \frac{1}{2} \cdot \delta_l \cdot c_w \cdot A_k$ Luftwiderstand

$$F_r = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2\lambda \cdot \frac{x'^2 + 4\lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2}{\sqrt{\left((4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^2\right)^3}} \right)$$

gesamte resultierende Widerstandskraft ($F_r + F_l$)

$\sum F = 0$ dynamisches Gleichgewicht der Kräfte

Erstellen des DGL-Systems:

$-F_{hx}+F_{rx}+F_{lx}+F_{tx}+F_H=0$ x-Richtung $\qquad J\cdot\varphi_{rot}''=F_H\cdot r \qquad F_H=J\cdot\frac{\varphi_{rot}''}{r} \qquad \varphi_{rot}'=\frac{x'}{r}\cdot\sqrt{1+4\,\lambda^2\cdot x^2}$

$$\varphi_{rot}''=\frac{1}{r}\cdot\left(x''\cdot\sqrt{1+4\,\lambda^2\cdot x^2}+\frac{4\,\lambda^2\cdot x\cdot x'^2}{\sqrt{1+4\,\lambda^2\cdot x^2}}\right)$$

Es sind: $\quad \varphi=\mathrm{atan}(2\,\lambda\cdot x) \quad \sin(\varphi)=\frac{2\cdot x\cdot\lambda}{\sqrt{4\cdot x^2\cdot\lambda^2+1}} \quad \cos(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\cdot x^2\cdot\lambda^2+1}}$

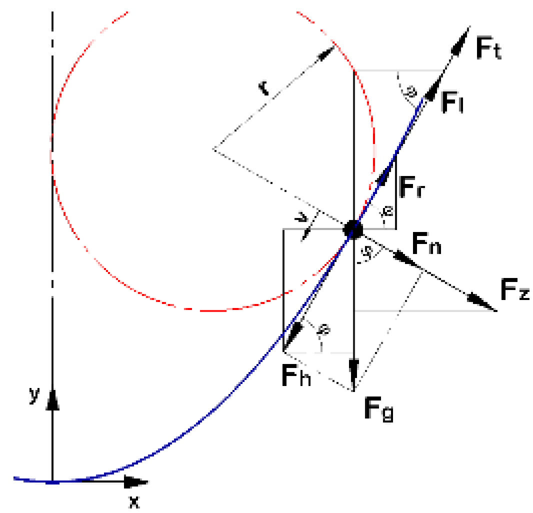
DGL für die x-Komponente:

$$-F_{hx}+F_{rx}+F_{lx}+F_{tx}+F_H=0$$

$$F_{hx}=m_k\cdot g\cdot\frac{2\cdot x\cdot\lambda}{4\cdot x^2\cdot\lambda^2+1}$$

$$F_{rx}=\mu\cdot m_k\cdot\left(\frac{g}{\sqrt{4\cdot x^2\cdot\lambda^2+1}}+2\,\lambda\cdot\frac{x'^2+4\,\lambda^2\cdot x^2\cdot x'^2}{\sqrt{\left(\left(4\cdot x^2\cdot\lambda^2+1\right)^2\right)^3}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{4\cdot x^2\cdot\lambda^2+1}}$$

$$F_{lx}=k\cdot x'^2 \qquad F_{tx}=m_k\cdot x''$$



$$-m_k\cdot g\cdot\frac{2\cdot x(t)\cdot\lambda}{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}+\mu\cdot m_k\cdot\left(\frac{g}{\sqrt{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}}+2\,\lambda\cdot x'(t)^2\cdot\frac{1+4\,\lambda^2\cdot x(t)^2}{\sqrt{\left(\left(4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1\right)^2\right)^3}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}}+k\cdot x'(t)^2+m_k\cdot x''(t)+\frac{J}{r^2}\cdot\left(x''(t)\cdot\sqrt{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}+\frac{4\,\lambda^2\cdot x(t)\cdot x'(t)^2}{\sqrt{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}}\right)=0$$

$$x''(t)\cdot\left(1+\frac{J}{m_k\cdot r^2}\cdot\sqrt{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}\right)-g\cdot\frac{2\cdot x(t)\cdot\lambda}{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}+\mu\cdot\left(\frac{g}{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}+\frac{2\,\lambda\cdot x'(t)^2}{\left(4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1\right)^2\cdot\sqrt{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}}\right)+k\cdot x'(t)^2+\frac{J}{m_k\cdot r^2}\cdot\frac{4\,\lambda^2\cdot x(t)\cdot x'(t)^2}{\sqrt{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}}=0$$

Komponenten der Kräfte eingesetzt und vereinfacht:

Parameter und Konstanten:

$\lambda := 2 \cdot 0.03064734 \, \frac{1}{m}$ $\quad m_k := 1\, kg$ $\quad \delta_l := 1.29\, kg \cdot m^{-3}$ $\quad c_w := 1.2$ $\quad d := 6\, cm$ $\quad A_k := \frac{\pi}{4} \cdot d^2$ $\quad k := \frac{1}{2} \cdot \delta_l \cdot c_w \cdot A_k$ $\quad r := \frac{d}{2}$

$x_0 := 50\, m$ $\quad t_e := 20\, s$ $\quad \mu := 0.12$ $\quad y_0 := \lambda \cdot x_0^{\,2} = 153.24\, m$ $\quad J := \frac{2}{5} \cdot m_k \cdot r^2$

Nebenbedingungen

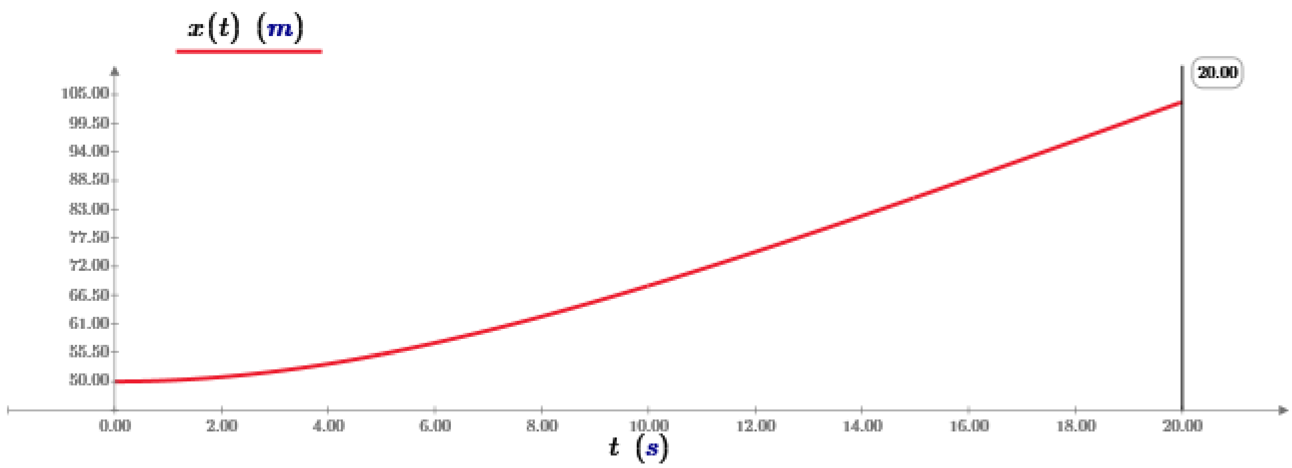
$x(0\, s) = x_0 \qquad x'(0\, s) = 0\, \frac{m}{s}$

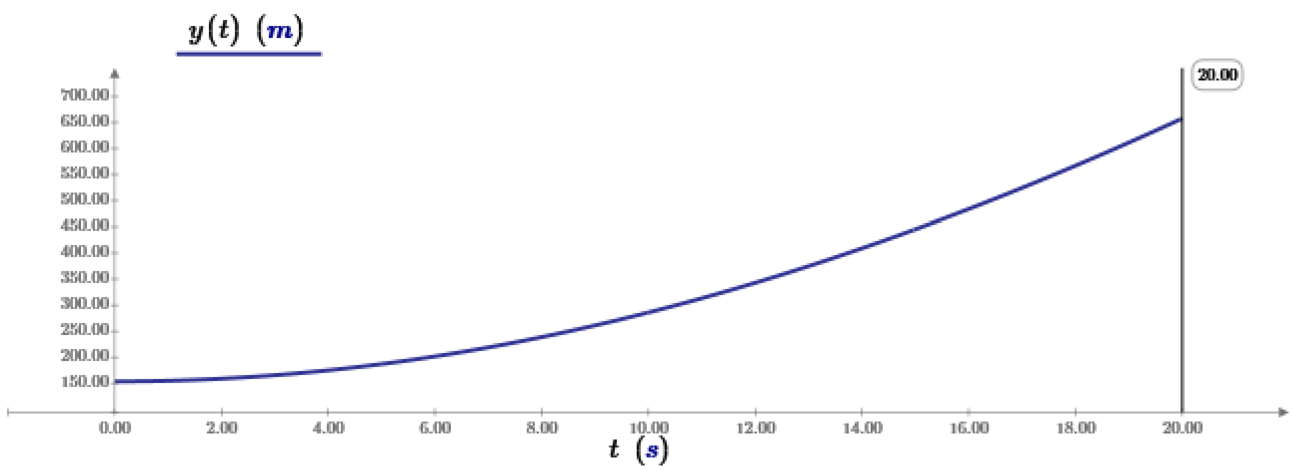
$$x''(t) \cdot \left(1 + \frac{J}{m_k \cdot r^2} \cdot \sqrt{4 \cdot x(t)^2 \cdot \lambda^2 + 1}\right) - g \cdot \frac{2 \cdot x(t) \cdot \lambda}{4 \cdot x(t)^2 \cdot \lambda^2 + 1} + \mu \cdot \left(\frac{g}{4 \cdot x(t)^2 \cdot \lambda^2 + 1} + \frac{2\,\lambda \cdot x'(t)^2}{\left(4 \cdot \lambda^2 \cdot x(t)^2 + 1\right)^2 \cdot \sqrt{4 \cdot \lambda^2 \cdot x(t)^2 + 1}}\right) + \frac{k}{m_k} \cdot x'(t)^2 + \frac{J}{m_k \cdot r^2} \cdot \frac{4\,\lambda^2 \cdot x(t) \cdot x'(t)^2}{\sqrt{4 \cdot x(t)^2 \cdot \lambda^2 + 1}} = 0$$

Gleichungslöser

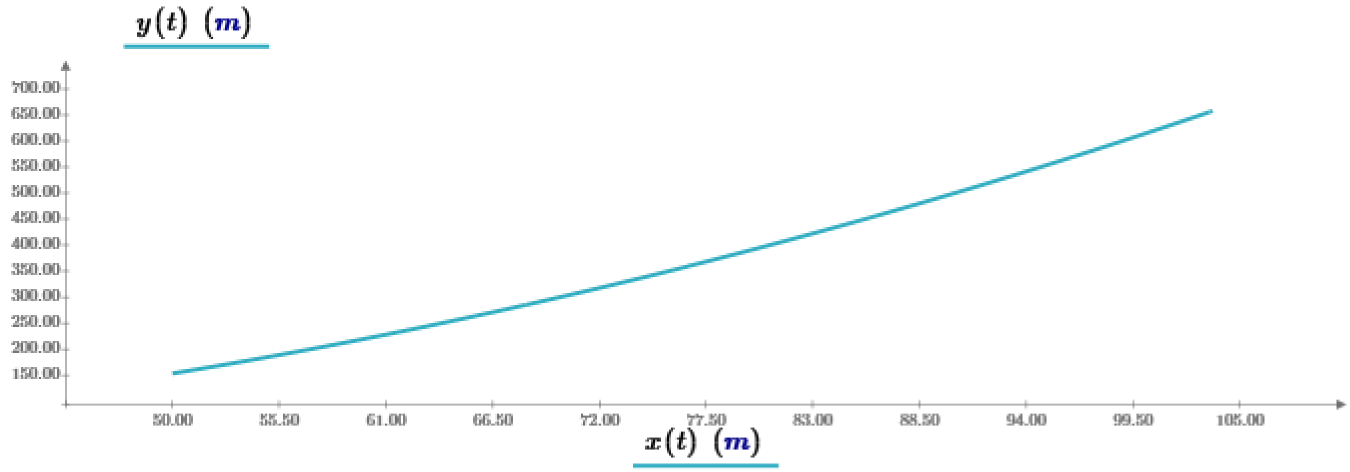
$x := \text{odesolve}\left(x(t), t_e\right)$

$t := 0\, s, 0.01\, s \,..\, t_e \qquad y(t) := \lambda \cdot x(t)^2$ Diagramm für die Koordinaten





$$y(t) := \lambda \cdot x(t)^2$$



Wann erreicht der Körper den Scheitelpunkt der Parabel?

Schätzwerte

$t := 1\ s$

$y(t) = 0\ m$

$t_s := \boxed{\text{find}(t)} = ?$

Nach $\boxed{t_s} = ?$ ist der Körper am tiefsten Punkt angelangt.