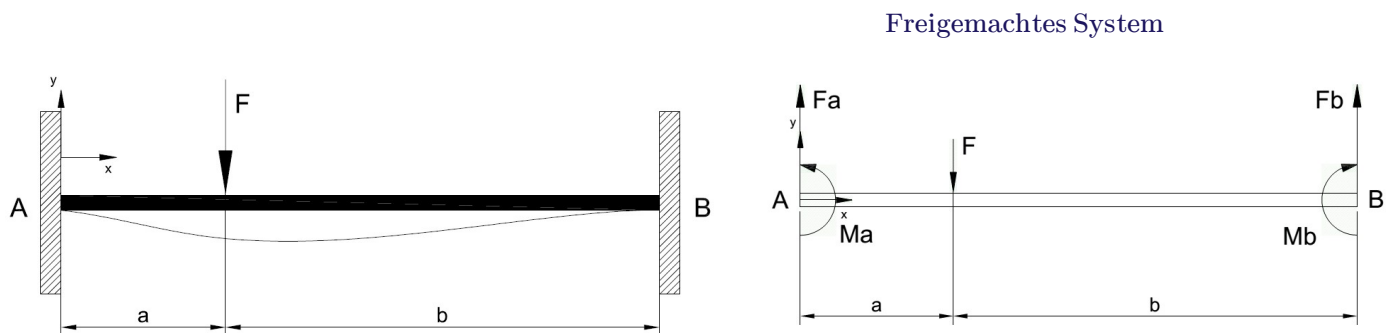


Ein Träger wird an seinen beiden Enden fest eingespannt und mit einer Kraft außermittig belastet. (siehe Skizze)

Gesucht sind die Gleichungen der Durchbiegung sowie die statischen Schnittgrößen.

An welcher Stelle des Trägers ist die maximale Durchbiegung ?



Lösung:

Der Träger ist statisch unbestimmt gelagert und wir müssen die Verformungen mit berücksichtigen.

$$E \cdot I \cdot y''(x) = -M_b(x) \quad \text{Aus der Balkentheorie}$$

Da es hier sich um ein Träger mit 2 Feldern handelt, wird bereichsweise integriert.

Links von "F" gilt:

$$M_{bl}(x) = M_a - F_a \cdot x$$

Rechts von "F" gilt:

$$M_{br}(x) = M_a - F_a \cdot x + F \cdot (x - a)$$

$$y_l(x) = -\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(C_2 - \frac{x^3 \cdot F_a}{6} + \frac{x^2 \cdot M_a}{2} - \frac{x \cdot (M_a^2 - 2 C_1 \cdot F_a)}{2 F_a} \right) \quad \text{Integriert}$$

$$y_r(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\left(\frac{a \cdot F}{2} - \frac{M_a}{2} \right) \cdot x^2 - C_4 - \frac{x^3 \cdot (F - F_a)}{6} - \frac{x \cdot (F \cdot a \cdot (F \cdot a - 2 M_a) + (2 F - 2 \cdot F_a) \cdot C_3 + M_a^2)}{2 (F - F_a)} \right)$$

Weiterhin gelten die geometrischen Beziehungen:

$$y_l(0) = 0$$

$$y_l'(0) = 0$$

$$y_r(a+b) = 0$$

$$y_r'(a+b) = 0$$

Daraus werden die Integrationskonstanten ermittelt:

$$C_1 = \frac{M_a^2}{2 F_a} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = -\frac{(a \cdot F_a - b \cdot F - M_a + b \cdot F_a)^2}{2 (F - F_a)}$$

$$C_4 = -\frac{1}{6} (a+b)^2 \cdot (a \cdot F - 3 M_a - 2 b \cdot F + 2 a \cdot F_a + 2 b \cdot F_a)$$

Einsetzen der Konstanten in die Ausgangsgleichungen ergibt dann folgendes:

$$y_l(x) = \frac{x^2 \cdot (x \cdot F_a - 3 M_a)}{6 E \cdot I}$$

$$y_r(x) = \frac{(a+b-x)^2 \cdot (a \cdot F - 3 M_a - 2 b \cdot F - x \cdot F + 2 a \cdot F_a + 2 b \cdot F_a + x \cdot F_a)}{6 E \cdot I}$$

Es fehlen jetzt aber noch zwei unbekannte Größen, die aus den Übergangsbedingungen an der Schnittstelle "a" bestimmt werden (Kompatibilitätsbedingungen):

$$y_l(a) = y_r(a) \quad \text{Durchbiegung an der Stelle "a"}$$

$$y_l'(a) = y_r'(a) \quad \text{Steigung an der Stelle "a"}$$

Auswertung der beiden Gleichungen mit den zwei Unbekannten führt auf:

$$F_a = F \cdot \frac{b^2 \cdot (3 a + b)}{(a + b)^3}$$

$$M_a = F \cdot \frac{a \cdot b^2}{(a + b)^2}$$

Die beiden Lösungen in die Funktionsgleichungen eingesetzt, ergeben die vollständigen Gleichungen der Biegelinie:

$$y_l(x) = -\frac{b^2 \cdot x^2 \cdot F \cdot (3 a \cdot (a + b) - x \cdot (3 a + b))}{6 E \cdot I \cdot (a + b)^3} \quad 0 \leq x \leq a$$

$$M_{bl}(x) = F \frac{b^2}{(a + b)^3} (a \cdot (a + b) - x \cdot (3 a + b)) \quad F_{bl}(x) = -F \frac{b^2 (3 a + b)}{(a + b)^3}$$

$$y_r(x) = \frac{a^2 \cdot F \cdot (a \cdot (a + b) - x \cdot (3 b + a)) \cdot (a + b - x)^2}{6 E \cdot I \cdot (a + b)^3} \quad a < x \leq a + b$$

$$M_{br}(x) = -F \frac{a^2}{(a + b)^3} (a^2 + 3 a \cdot b - x \cdot a + 2 b^2 - 3 x \cdot b) \quad F_{br}(x) = F \frac{a^2 (3 b + a)}{(a + b)^3}$$

Ein Zahlenbeispiel mit einem Rechteckrohr 80x60x5 aus ST37-2:

$$E := 2.1 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2} \quad I := 103 \text{ cm}^4 \quad a := 260 \text{ mm} \quad l := 800 \text{ mm} \quad F := 16 \text{ kN}$$

$$b := l - a = 540 \text{ mm} \quad x := 0,1 \text{ mm} \dots a + b \quad W_b := 25.8 \text{ cm}^3$$

$$Nm := 1 \text{ N} \cdot m \quad kNm := 1 \text{ kN} \cdot m$$

Bestimmung und Darstellung der statischen Schnittgrößen:

$$F_a := F \frac{b^2 (3a + b)}{(a + b)^3}$$

$$F_b := F \cdot \left(1 - \frac{b^2 (3a + b)}{(a + b)^3} \right)$$

$$F_a = 12.03 \text{ kN}$$

$$F_b = 3.97 \text{ kN}$$

$$M_a := F \cdot a \frac{b^2}{(a + b)^2}$$

$$M_b := F \cdot b \frac{a^2}{(a + b)^2}$$

$$M_a = 1895.4 \text{ Nm}$$

$$M_b = 912.6 \text{ Nm}$$

$$y_l(x) := -\frac{b^2 \cdot x^2 \cdot F \cdot (3a \cdot (a + b) - x \cdot (3a + b))}{6 E \cdot I \cdot (a + b)^3}$$

$$y_r(x) := \frac{a^2 \cdot F \cdot (a \cdot (a + b) - x \cdot (3b + a)) \cdot (a + b - x)^2}{6 E \cdot I \cdot (a + b)^3}$$

$$M_{bl}(x) := F \frac{b^2}{(a + b)^3} (a^2 + a \cdot b - 3a \cdot x - b \cdot x)$$

$$F_{bl}(x) := -F \frac{b^2 (3a + b)}{(a + b)^3}$$

$$M_{br}(x) := -F \frac{a^2}{(a + b)^3} (a^2 + 3a \cdot b - x \cdot a + 2b^2 - 3x \cdot b)$$

$$F_{br}(x) := F \frac{a^2 (3b + a)}{(a + b)^3}$$

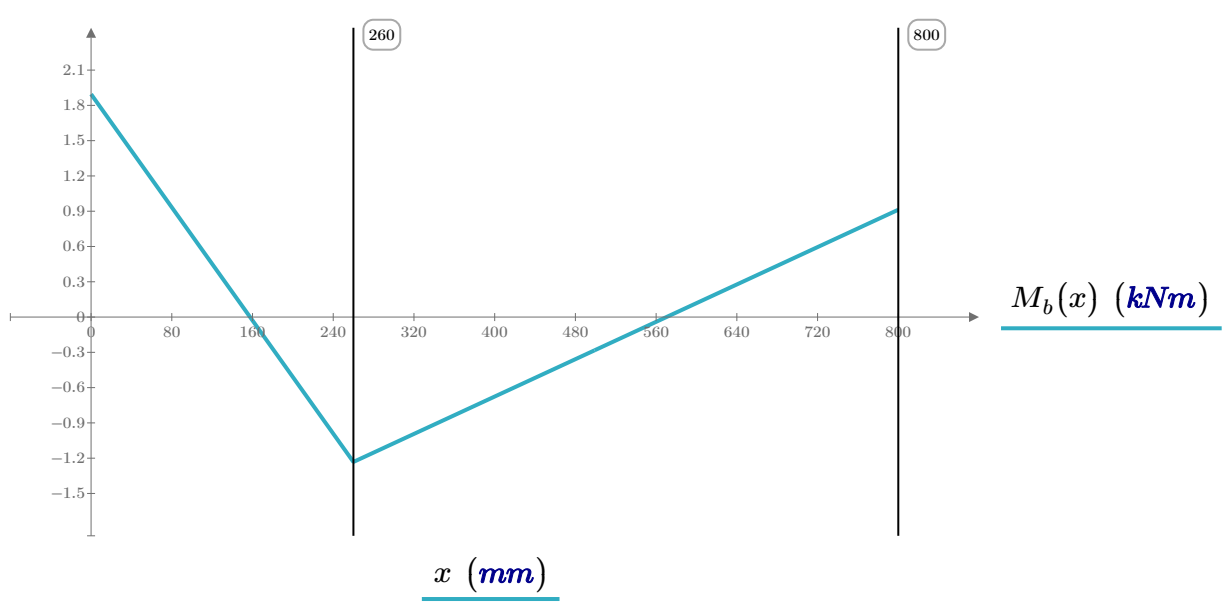
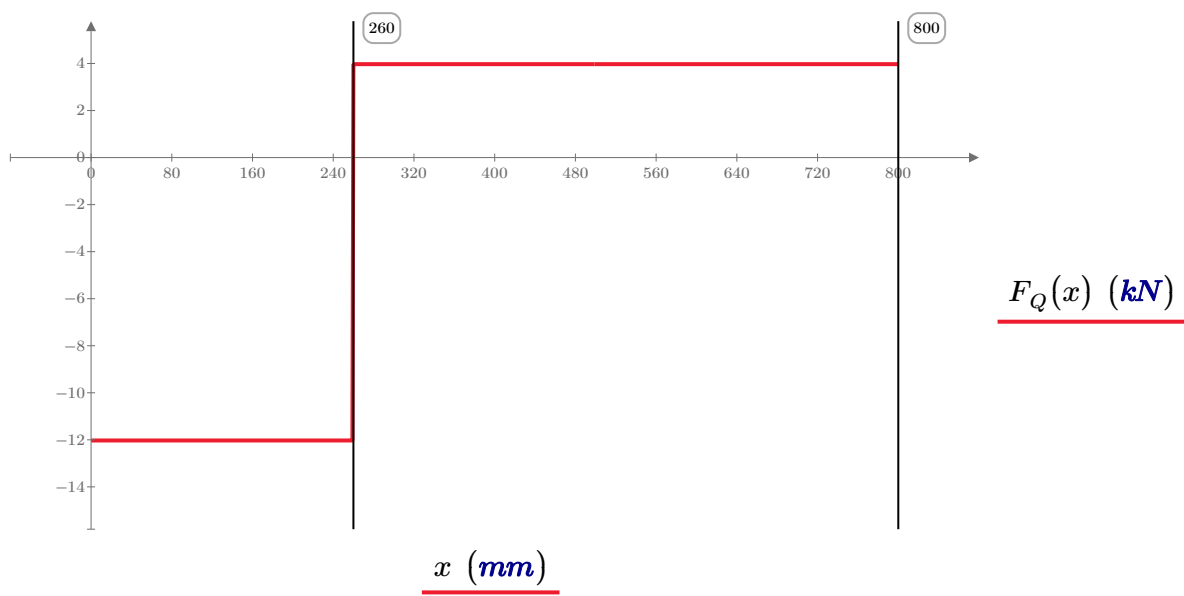
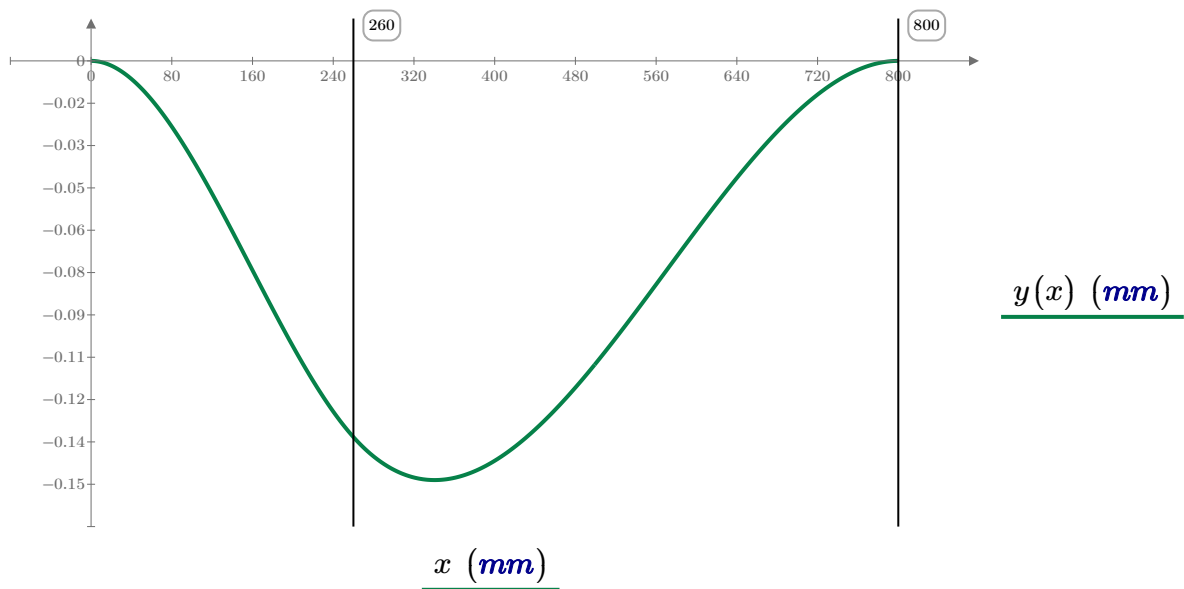
$$y(x) := \left\| \begin{array}{l} \text{if } 0 \leq x < a \\ \quad \left\| y_l(x) \right\| \\ \text{if } a \leq x \leq a + b \\ \quad \left\| y_r(x) \right\| \end{array} \right\|$$

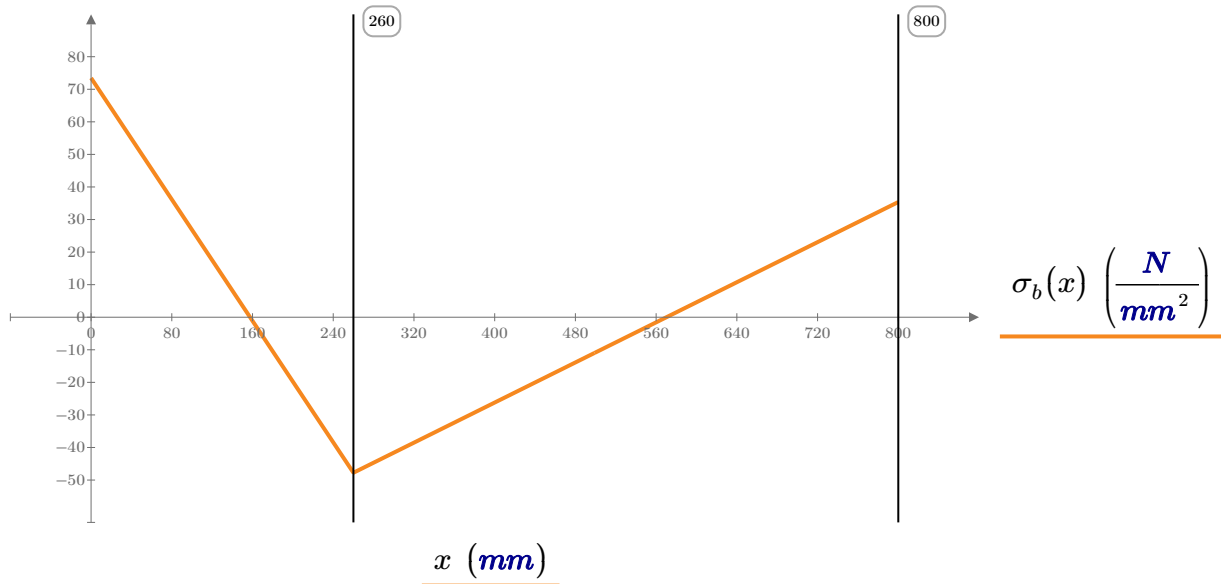
$$F_Q(x) := \left\| \begin{array}{l} \text{if } 0 \leq x < a \\ \quad \left\| F_{bl}(x) \right\| \\ \text{if } a \leq x \leq a + b \\ \quad \left\| F_{br}(x) \right\| \end{array} \right\|$$

$$M_b(x) := \left\| \begin{array}{l} \text{if } 0 \leq x < a \\ \quad \left\| M_{bl}(x) \right\| \\ \text{if } a \leq x \leq a + b \\ \quad \left\| M_{br}(x) \right\| \end{array} \right\|$$

Biegespannungsverlauf:

$$\sigma_b(x) := \frac{M_b(x)}{W_b}$$





Die maximale Durchbiegung tritt in diesem Beispiel im linken Trägerabschnitt auf:

Es ist:

$$\frac{d}{dx} y_r(x) = 0 \quad \text{Mit dessen Lösungen:} \quad x = \left[\begin{array}{l} a+b \\ \frac{(a+b)^2}{a+3 \cdot b} \end{array} \right]$$

$$x_1 := a+b \quad x_2 := \frac{(a+b)^2}{a+3 \cdot b}$$

Betragsmäßig ist bei der zweiten Lösung ein Maximum aufzufinden wegen:

$$y_r''(x_1) = -\frac{a^2 \cdot F \cdot b}{(a+b)^2 \cdot E \cdot I} \quad \text{Mathematisches Maximum, da } y < 0$$

$$y_r''(x_2) = \frac{a^2 \cdot b \cdot F}{E \cdot I \cdot (a+b)^2} \quad \text{Mathematisches Minimum, da } y > 0$$

$$y_r(x_1) = 0 \text{ mm}$$

$$y_r(x_2) = -0.15 \text{ mm} \quad \text{bei} \quad x_2 = 340.43 \text{ mm}$$

$$x_{y_{max}} := \frac{(a+b)^2}{a+3 \cdot b} \quad y_{max} := -\frac{2 a^2 \cdot F \cdot b^3}{3 E \cdot I \cdot (a+3 \cdot b)^2} \quad x_{y_{max}} = 340.43 \text{ mm} \quad y_{max} = -0.15 \text{ mm}$$

Maximale Biegespannung (vgl. Diagramm):

$$\sigma_{b_{max}} := \sigma_b(0 \text{ mm}) = 73.47 \frac{N}{mm^2} \quad M_{b_{max}} := M_b(0 \text{ mm}) = 1895.4 \text{ Nm}$$

Zum Vergleich:

Ein Träger gleicher Geometrie mit gleichen Lasten wird an den Lagerstellen nicht fest eingespannt .
(Die Momente verschwinden in den Lagerstellen)

$$F_a = 12.03 \text{ kN}$$

$$F_b = 3971.5 \text{ N}$$

$$y_{max} = 0.6 \text{ mm}$$

$$x_{y_{max}} = 340.8 \text{ mm}$$

$$\sigma_{b_{max}} = 99.33 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$