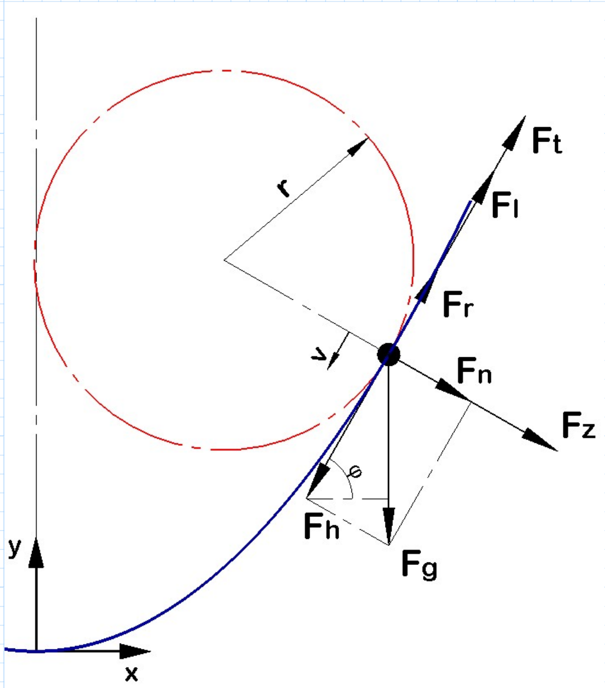
Eine punktförmige Masse wird am oberen Ende eines Parabelbogens aus der Ruhe losgelassen.
Wie sieht der Verlauf für Beschleunigung und Geschwindigkeit aus?
Die Bewegung erfolgt mit Reibung und Luftwiderstand.

$y(x) = \lambda \cdot x^2$ **Parabelbahn**



Ableitungen:

$$\frac{d}{dx} y(x) = 2\lambda \cdot x \qquad \frac{d^2}{dx^2} y(x) = 2\lambda$$

$$y'(t) = 2\lambda \cdot x \cdot x' \qquad y''(t) = 2\lambda \cdot \left(x'^2 + x'' \cdot x\right)$$

Es ist: $\varphi = \operatorname{atan}(2\lambda \cdot x)$

$$F_r = (F_n + F_z) \cdot \mu \qquad F_n = m_k \cdot g \cdot \cos(\operatorname{atan}(2\lambda \cdot x))$$

$$F_n = \frac{m_k \cdot g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}}$$

$$F_z = m_k \cdot \frac{v^2}{r} \qquad v^2 = x'^2 + y'^2$$ **Zentrifugalkraft an der Ortskrümmung**

$$v^2 = x'^2 + 4\lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2$$ **resultierende Geschwindigkeit (=Bahngeschwindigkeit)**

$$r = \frac{\sqrt{\left(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1\right)^3}}{2\lambda}$$ **Ortskrümmungsradius**

$$F_z = 2\lambda \cdot m_k \cdot \frac{x'^2 + 4\lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2}{\sqrt{\left(1 + (2\lambda \cdot x)^2\right)^3}}$$

$$F_l = k \cdot v^2 \qquad F_l = k \cdot \left(x'^2 + 4\lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2\right) \qquad k = \frac{1}{2} \cdot \delta_l \cdot c_w \cdot A_k$$ **Luftwiderstand**

$$F_r = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2\lambda \cdot \frac{x'^2 + 4\lambda^2 \cdot x^2 \cdot x'^2}{\sqrt{\left(\left(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1\right)^2\right)^3}}\right)$$ **gesamte resultierende Widerstandskraft ($F_r + F_l$)**

Suchen der Lösung mit Hilfe des Lagrangeschen Formalismus für die x- und y- Richtung:

$y(x) = \lambda \cdot x^2$ **Parabelbahn**

$E_k = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot v^2$ $v = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ $E_k = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot (x'^2 + y'^2)$

$E_p = -m_k \cdot g \cdot y$

Lagrangesche Formulierung der dissipativen Kräfte(Luftwiderstand und Reibung):

Reibung:

$P_r = \int_0^v h_r(v)\,\mathrm{d}v$ $h_r(v) = \mu \cdot (F_n + F_z)$ $F_n = \frac{m_k \cdot g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}}$ $F_z = 2\,\lambda \cdot m_k \cdot \frac{v^2}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}}$

$$h_r(v) = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2\,\lambda \cdot \frac{v^2}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right)$$

$$P_r = \mu \cdot m_k \cdot \int_0^v \left(\frac{g}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + 2\,\lambda \cdot \frac{v^2}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right) \mathrm{d}v$$

$$P_r = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g \cdot v}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{v^3}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right)$$

$$P_r = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}^{\,3}}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right)$$

Luftwiderstand:

$P_l = \int_0^v h_l(v)\,\mathrm{d}v$ $h_l(v) = k \cdot v^2$ $P_l = k \cdot \int_0^v v^2\,\mathrm{d}v$ $P_l = \frac{k}{3} \cdot v^3$ $P_l = \frac{k}{3} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}^{\,3}$

Somit ergibt sich für die gesamten dissipativen Kräfte folgendes:

$P = P_r + P_l$

$$P = \mu \cdot m_k \cdot \left(\frac{g \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1}} + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}^{\,3}}{\sqrt{(4 \cdot x^2 \cdot \lambda^2 + 1)^3}} \right) + \frac{k}{3} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}^{\,3}$$

Allgemeine Lagrangesche Gleichung für die x und- y Koordinate:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{dx'}-\frac{dL}{dx}+\frac{dP}{dx'}=0$$ x-Koordinate

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{dy'}-\frac{dL}{dy}+\frac{dP}{dy'}=0$$ y-Koordinate

x-Koordinate:

$$L=E_k-E_p \qquad L=\frac{1}{2}\cdot m_k\cdot\left(x'^2+y'^2\right)+m_k\cdot g\cdot y$$

$$\frac{dL}{dx'}=m_k\cdot x' \qquad \frac{d}{dt}\frac{dL}{dx'}=m_k\cdot x'' \qquad \frac{dL}{dx}=0$$

$$\frac{dP}{dx'}=x'\cdot k\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}+\mu\cdot m_k\cdot\left(\frac{x'\cdot g}{\sqrt{4\cdot x^2\cdot\lambda^2+1}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}+\frac{2\cdot x'\cdot\lambda\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{\left(4\cdot x^2\cdot\lambda^2+1\right)^3}}\right)$$

$$x''(t)+x'(t)\cdot\frac{k}{m_k}\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}+\mu\cdot\left(\frac{x'(t)\cdot g}{\sqrt{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}+\frac{2\cdot x'(t)\cdot\lambda\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{\sqrt{\left(4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1\right)^3}}\right)=0$$

y-Koordinate:

$$L=E_k-E_p \qquad L=\frac{1}{2}\cdot m_k\cdot\left(x'^2+y'^2\right)-m_k\cdot g\cdot y$$

$$\frac{dL}{dy'}=m_k\cdot y' \qquad \frac{d}{dt}\frac{dL}{dy'}=m_k\cdot y'' \qquad \frac{dL}{dy}=-m_k\cdot g$$

$$\frac{dP}{dy'}=y'\cdot k\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}+\mu\cdot m_k\cdot\left(\frac{y'\cdot g}{\sqrt{4\cdot x^2\cdot\lambda^2+1}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}+\frac{2\cdot y'\cdot\lambda\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{\left(4\cdot x^2\cdot\lambda^2+1\right)^3}}\right)$$

$$y''(t)+g+y'(t)\cdot\frac{k}{m_k}\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}+\mu\cdot\left(\frac{y'(t)\cdot g}{\sqrt{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}+\frac{2\cdot y'(t)\cdot\lambda\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{\sqrt{\left(4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1\right)^3}}\right)=0$$

Schätzwerte

Nebenbedingungen

$$x(0\ s)=x_0 \qquad x'(0\ s)=0\ \frac{m}{s} \qquad y(0\ s)=y_0 \qquad y'(0\ s)=0\ \frac{m}{s} \qquad y'(t)=2\ \lambda\cdot x(t)\cdot x'(t)$$

$$x''(t)+x'(t)\cdot\frac{k}{m_k}\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}+\mu\cdot\left(\frac{x'(t)\cdot g}{\sqrt{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}+\frac{2\cdot x'(t)\cdot\lambda\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{\sqrt{\left(4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1\right)^3}}\right)=0$$

$$y''(t)+g+y'(t)\cdot\frac{k}{m_k}\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}+\mu\cdot\left(\frac{y'(t)\cdot g}{\sqrt{4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1}\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}+\frac{2\cdot y'(t)\cdot\lambda\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{\sqrt{\left(4\cdot x(t)^2\cdot\lambda^2+1\right)^3}}\right)=0$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}:=\mathrm{odesolve}\left(\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix},t_e\right)$$

$t := 0\ s, 0.01\ s .. t_e$

Diagramm für die Koordinaten