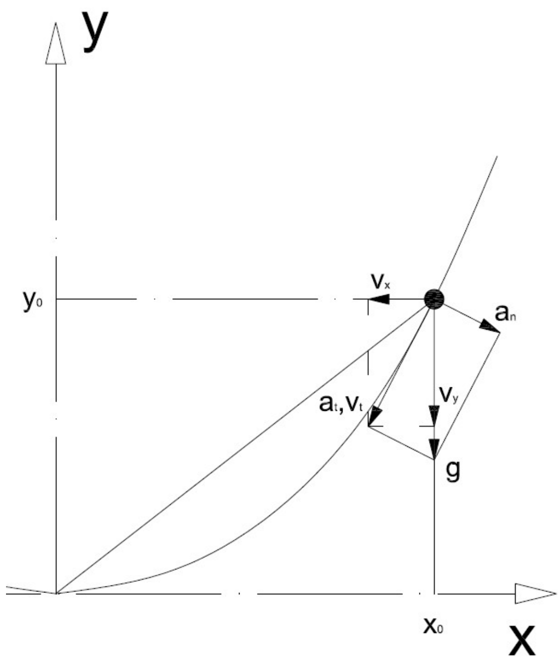
Eine punktförmige Masse wird am oberen Ende eines Parabelbogens losgelassen.
Wie lauten die DGL für Beschleunigung und Geschwindigkeit? Die Bewegung erfolgt reibungsfrei.
Eine andere punktförmige Masse gleitet ebenfalls reibungsfrei entlang einer schiefen Ebene welche in (xo/yo) beginnt und im Scheitelpunkt der Parabel endet.
Welcher Körper ist schneller?
Lösung:



Energetischer Ansatz:

Nach dem Energieerhaltungssatz gilt:

$$m \cdot g \cdot y_0 = m \cdot g \cdot y(x) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$y(x) = \frac{\lambda}{2} \cdot x^2$$ Parabelbahn

$$g \cdot y_0 = g \cdot y(x) + \frac{1}{2} \cdot v^2 \qquad v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2$$

$${v_x}^2 + {v_y}^2 = 2\,g \cdot \left(y_0 - \frac{\lambda}{2} \cdot x^2\right)$$

Diffrentiation der "x" und "y"– Koordinaten nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeiten in x– und y Richtung. (Der obere Strich bedeutet die Ableitung nach der Zeit)

$$v_x = x' \qquad v_y = y' = \lambda \cdot x \cdot x'$$ Eingesetzt erhält man:

$$x'^2 + \lambda^2 \cdot x'^2 \cdot x^2 = 2\,g \cdot \left(y_0 - \frac{\lambda}{2} \cdot x^2\right)$$ DGL des Bewegungsablaufs

$$x'^2 \cdot \left(1 + \lambda^2 \cdot x^2\right) = g \cdot \left(2 \cdot y_0 - \lambda \cdot x^2\right)$$

$$x' = \sqrt{\frac{g \cdot \left(2 \cdot y_0 - \lambda \cdot x^2\right)}{1 + \lambda^2 \cdot x^2}} = \frac{dx}{dt}$$ Trennung der Veränderlichen

$$\sqrt{\frac{1 + \lambda^2 \cdot x^2}{g \cdot \left(2 \cdot y_0 - \lambda \cdot x^2\right)}} \cdot dx = dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{1 + \lambda^2 \cdot x^2}{g \cdot \left(2 \cdot y_0 - \lambda \cdot x^2\right)}}\, \mathrm{d}x = t \qquad \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{1 + \lambda^2 \cdot x^2}{1 - \frac{\lambda}{2 \cdot y_0} \cdot x^2}}\, \mathrm{d}x = t \cdot \sqrt{2\,g \cdot y_0} \qquad \text{(I)}$$

Dieses elliptische Integral lässt sich nicht elementar lösen.

Lösen der DGL im Lösungsblock: Die DGL muss in ihrem höchsten Ableitungsterm linear sein, deshalb wird die Ausgangs–DGL nochmals nach der Zeit abgeleitet und vereinfacht (siehe unten).

$T_g := 17\ s \qquad x_0 := 50\ m \qquad \lambda := 0.03064734\ \frac{1}{m}$

Gleichungslöser Nebenbedingungen Schätzwerte

$x(0\ s) = x_0 \qquad x'(0\ s) = 0\ \frac{m}{s}$

$x''(t)\cdot\left(1+\lambda^2\cdot x(t)^2\right)+x'(t)^2\cdot\lambda^2\cdot x(t) = -g\cdot\lambda\cdot x(t)$

$x := \mathbf{odesolve}\left(x(t), T_g, 10^6\right)$

$x'(t)^2\cdot\left(1+\lambda^2\cdot x(t)^2\right) = g\cdot\left(2\ y_0-\lambda\cdot x(t)^2\right)$ Ausgangsgleichung

$2\cdot x'(t)\cdot x''(t)\cdot\left(1+\lambda^2\cdot x(t)^2\right)+x'(t)^2\cdot 2\cdot\lambda^2\cdot x(t)\cdot x'(t) = -2\ g\cdot\lambda\cdot x(t)\cdot x'(t)$

$x''(t)\cdot\left(1+\lambda^2\cdot x(t)^2\right)+x'(t)^2\cdot\lambda^2\cdot x(t) = -g\cdot\lambda\cdot x(t)$

<u>Einschub:</u> Diese DGL lässt sich auch über das Bogensegment herleiten:

$ds = dx\cdot\sqrt{1+\lambda^2\cdot x^2}$ Infinitesimal kleines Bogenstück $\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\sqrt{1+\lambda^2\cdot x^2}$

$v = \frac{ds}{dt} = x'\cdot\sqrt{1+\lambda^2\cdot x^2}$

Mit dieser Gleichung für die Geschwindigkeit geht man wieder in den Energiesatz ein:

$x'^2\cdot\left(1+\lambda^2\cdot x^2\right) = 2\ g\cdot\left(y_0-\frac{\lambda}{2}\cdot x^2\right)$ Diese Gleichung wird dann wieder zu:

$x''(t)\cdot\left(x(t)^2\cdot\lambda^2+1\right)+x'(t)^2\cdot x(t)\cdot\lambda^2 = -g\cdot x(t)\cdot\lambda$

Charakteristische Werte:
Berechnet werden soll die gesamte Dauer bis der Körper nach dem Start die komplette Parabel durchlaufen hat:

$$y(x) := \frac{\lambda}{2} \cdot x^2 \qquad y_0 := \frac{\lambda}{2} \cdot {x_0}^2$$

Für die Herleitung der Gesamtzeit werden die Zeitabschnitte für jedes Bogensegment aufsummiert.

$$v = \sqrt{2\ g \cdot (y_0 - y(x))}$$ aus dem Energieerhaltungssatz

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad ds = dx \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}$$ infinitesimal kleines Bogenstück:

$$v = \frac{dx \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}}{dt}$$

$$\frac{dx \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}}{dt} = \sqrt{2\ g \cdot (y_0 - y(x))}$$ Gleichsetzen der Terme

Durch Trennung der Veränderlichen und Integration kommt man auf die allgemeine Formel:
(Ähnliche Form wie (I))

$$T_{ges} := \frac{1}{\sqrt{2\ g}} \cdot \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}{y(x_0) - y(x)}}\, dx$$

$$T_{ges} = 8.28\ s \qquad t_0 := \frac{T_{ges}}{2} = 4.14\ s$$ Dauer bis zum tiefsten Punkt

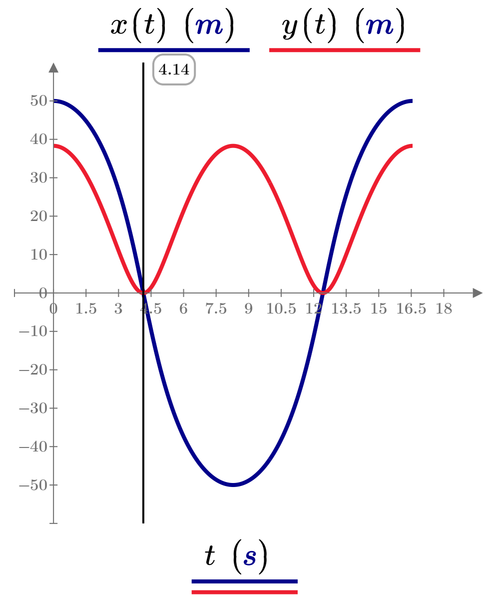
$$t := 0\ s, 0.02\ s .. 4 \cdot t_0$$

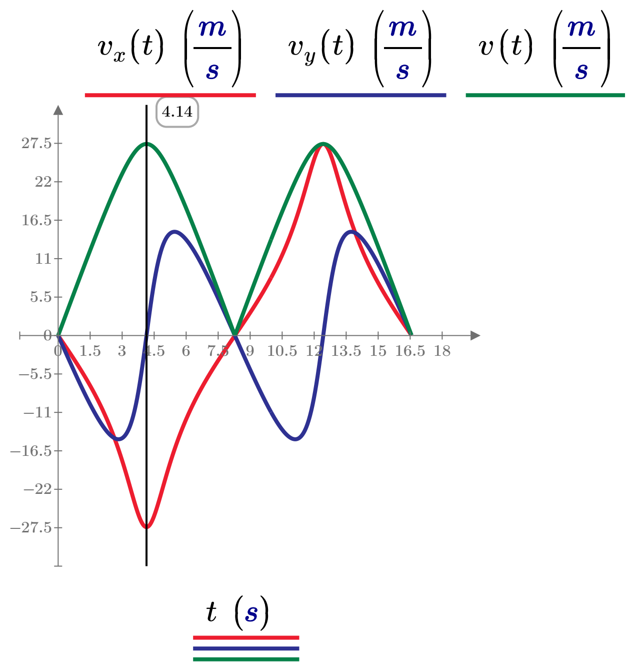
$$v_x(t) := \frac{d}{dt} x(t) \qquad a_x(t) := \frac{d^2}{dt^2} x(t) \qquad y(t) := \frac{\lambda}{2} \cdot x(t)^2 \qquad v_y(t) := \frac{d}{dt} y(t) \qquad a_y(t) := \frac{d^2}{dt^2} y(t)$$

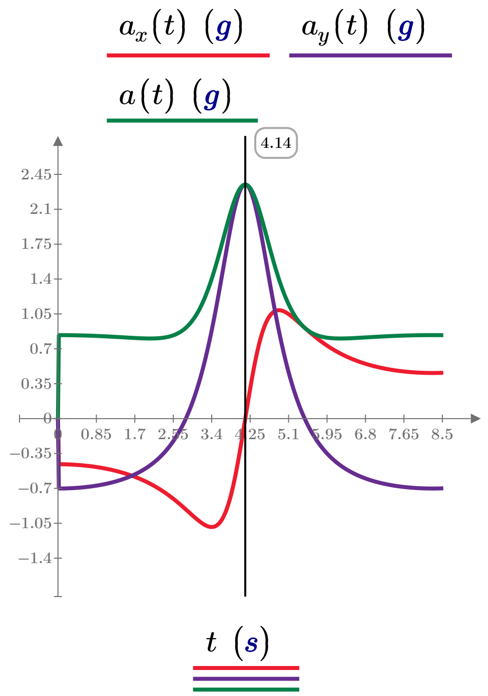
$$v(t) := \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$ absolute Geschwindigkeit und Beschleunigung des Körpers

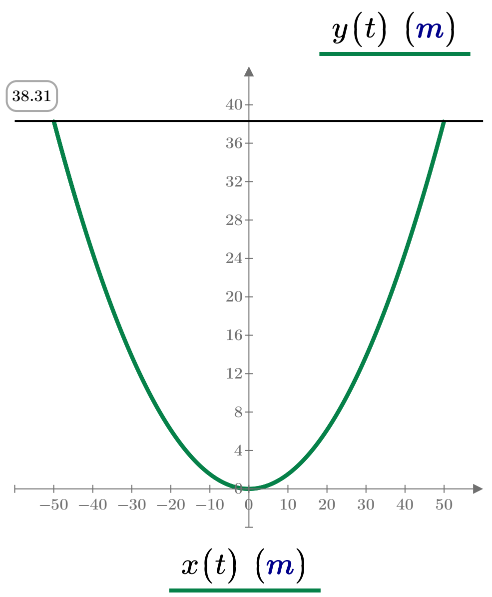
$$a(t) := \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2}$$

Auswertung der Funktionen im Diagramm:









Herleitung der Bewegungsgleichungen für den Körper auf der schiefen Ebene:

Nach dem Energieerhaltungssatz gilt auch hier wieder:

$$m \cdot g \cdot y_0 = m \cdot g \cdot g(x) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Schiefe Ebene mit der Geradengleichung:

$$g(x) = \beta \cdot x \qquad \beta = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\lambda}{2} \cdot x_0 \qquad \text{wegen:} \qquad y_0 = \frac{\lambda}{2} \cdot {x_0}^2$$

$$g \cdot y_0 = g \cdot g(x) + \frac{1}{2} \cdot v^2 \qquad v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2$$

$${v_x}^2 + {v_y}^2 = 2\ g \cdot (y_0 - \beta \cdot x) \qquad x'(t)^2 + \beta^2 \cdot x'(t)^2 = 2\ g \cdot (y_0 - \beta \cdot x(t))$$

$$x'(t)^2 \cdot (1 + \beta^2) = 2\ g \cdot (y_0 - \beta \cdot x(t))$$

Auch hier soll versucht werden, eine analytische Lösung zu finden:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2\ g}{1 + \beta^2} \cdot (y_0 - \beta \cdot x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\ g}{1 + \beta^2}} \cdot \sqrt{y_0 - \beta \cdot x}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{dx}{\sqrt{y_0 - \beta \cdot x}} = \sqrt{\frac{2\ g}{1 + \beta^2}} \cdot dt \qquad \int_x^{x_0} \frac{1}{\sqrt{y_0 - \beta \cdot x}}\, \mathrm{d}x = t \cdot \sqrt{\frac{2\ g}{1 + \beta^2}}$$

führt auf die analytische Lösung:

$$x(t) = x_0 - \frac{g \cdot t^2 \cdot \lambda \cdot x_0}{\lambda^2 \cdot {x_0}^2 + 4} \qquad t_E := 2\ \sqrt{\frac{\lambda^2 \cdot {x_0}^2 + 4}{g \cdot \lambda}} = 9.192\ s$$

Dauer bis zum anderen oberen Parabelpunkt.

Fazit: Der Körper auf der Parabelbahn kommt schneller im Ziel an.

$$\Delta t := t_E - T_{ges} = 0.908\ s$$

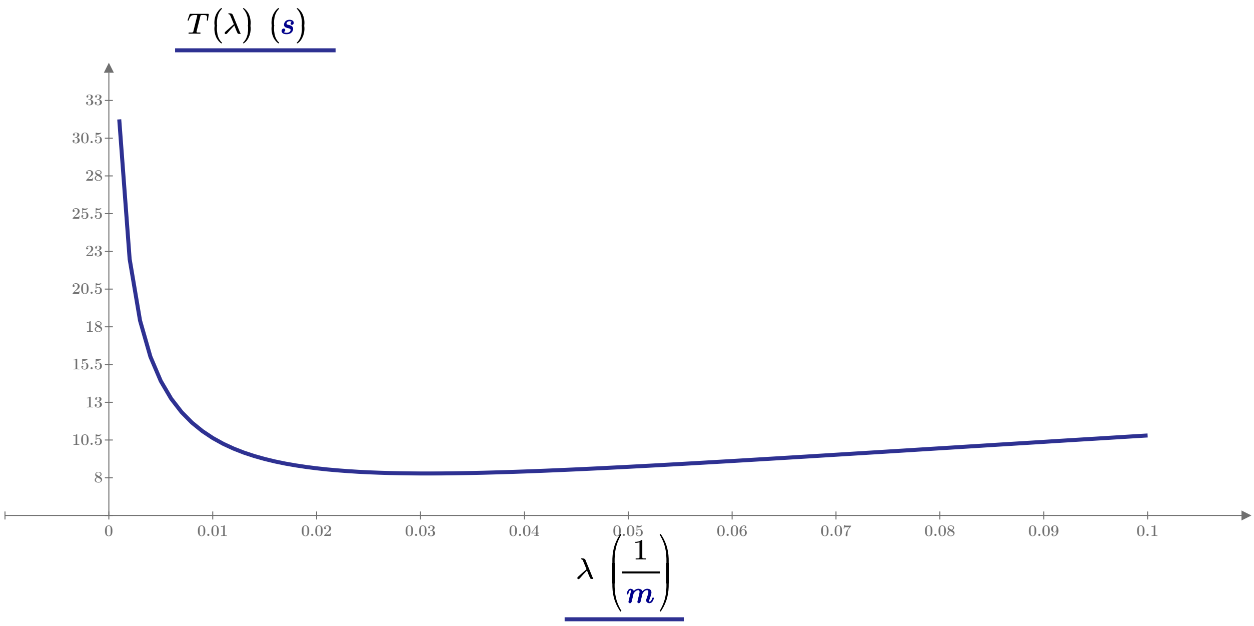
Vorgabe: "xo" bleibt konstant.
Wie muss der Parameter λ gewählt werden, damit die Zeit von der Ausgangsposition bis zum Scheitelpunkt minimal wird?

$$T(\lambda) := \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{\frac{x^2 \cdot \lambda^2 + 1}{g \cdot \lambda \cdot \left(x_0^{\ 2} - x^2\right)}}\, \mathrm{d}x$$

Dies ist ein Elliptisches Integral welches numerisch gelöst wird:

$$\lambda := 0 \cdot \frac{1}{m}, 0.001 \cdot \frac{1}{m} .. 0.1 \cdot \frac{1}{m}$$

Verlauf der Zeitdauer in Abhängigkeit des Parabel–Parameters λ :



Der optimale Parameter λ, bei dem der Körper am schnellsten unterwegs ist wird nummerisch ermittelt:

Schätzwerte

$$\lambda := 0.02 \cdot \frac{1}{m}$$

Nebenbedingungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} T(\lambda) = 0 \qquad \lambda_{opt} := \mathbf{find}(\lambda) = 0.03064734\ \frac{1}{m}$$

Scheitelpunkt der Parabel:

$$\frac{\lambda_{opt}}{2} = 0.015324\ \frac{1}{m}$$

$$y_0 := \frac{\lambda_{opt}}{2} \cdot x_0^{\ 2} = 38.31\ m$$