

Gegeben:

| l_0 | l_1 | l_2 | l_4 | p | q | d_0 | d_1 | E | $\sigma_{z,zul}$ | δ_W |
|-------|-------|-------|-------|-----|----------------------------|-------|-------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| (m) | (m) | (m) | (m) | (1) | $\left(\frac{N}{m}\right)$ | (mm) | (mm) | $\left(\frac{N}{mm^2}\right)$ | $\left(\frac{N}{mm^2}\right)$ | $\left(\frac{kg}{L}\right)$ |
| 10 | 1 | 3.5 | 7.5 | 0.1 | 94.6 | 100 | 1 | $2.1 \cdot 10^5$ | 100 | 1 |

Ermittlung der gesamten Gewichtskraft der Rohrleitung:

$$F_g := q \cdot l_0 \cdot (1 + p) + \frac{\pi}{4} \cdot d_0^2 \cdot l_0 \cdot \delta_W \cdot g \quad F_g = 1810.81 \text{ N} \quad M_f := \frac{F_g}{60 \text{ mm}} = 30.18 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

geometrische Vorüberlegungen (Exakte Berechnung!):

$$\Delta l = l_3 - (l_2 - l_1) \quad \text{Absenkung des Aufhängepunktes}$$

$$s_0 := \sqrt{\frac{l_0^2}{4} + (l_2 - l_1)^2} \quad \text{Länge des unbelasteten Seils}$$

$$s_1 := \sqrt{\frac{l_0^2}{4} + l_3^2} \quad \text{Länge des belasteten Seils}$$

$$s_1 = s_0 + \Delta s \quad \Delta s = \varepsilon \cdot s_0 \quad \varepsilon = \frac{\sigma_{z,zul}}{E} \quad \Delta s = \frac{\sigma_{z,zul}}{E} \cdot s_0$$

$$s_1 = s_0 + \frac{\sigma_{z,zul}}{E} \cdot s_0 \quad s_1 = s_0 \cdot \left(1 + \frac{\sigma_{z,zul}}{E}\right)$$

$$s_1 := \left(1 + \frac{\sigma_{z,zul}}{E}\right) \cdot \sqrt{\frac{l_0^2}{4} + (l_2 - l_1)^2} \quad \text{zulässige Länge des Seils nach der Dehnung}$$

$$\frac{F_g}{2 F_s} = \sin(\varphi) \quad F_s = \frac{F_g}{2 \sin(\varphi)} \quad \cos(\varphi) = \frac{l_0}{2 s_1} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{l_0}{2 s_1}\right) \quad \varphi := \arccos\left(\frac{l_0}{2 \left(1 + \frac{\sigma_{z,zul}}{E}\right) \cdot \sqrt{\frac{l_0^2}{4} + (l_2 - l_1)^2}}\right) = 26.62^\circ$$

$$F_s := \frac{F_g}{2 \sqrt{1 - \frac{l_0^2}{4 \cdot \left(\frac{l_0^2}{4} + (l_1 - l_2)^2\right) \cdot \left(\frac{\sigma_{z,zul}}{E} + 1\right)^2}} \quad F_s = 2.02 \text{ kN} \quad F_{s,Z} := M_f \cdot 66.83 \text{ mm} = 2.02 \text{ kN} \quad \sigma_v = \frac{4 F_s}{n \cdot \pi \cdot d_1^2} = \sigma_{z,zul} \quad n = \frac{4 F_s}{\pi \cdot d_1^2 \cdot \sigma_{z,zul}}$$

$$n := \frac{2 F_g}{\pi \cdot d_1^2 \cdot \sigma_{z,zul} \cdot \sqrt{1 - \frac{l_0^2}{4 \cdot \left(\frac{l_0^2}{4} + (l_1 - l_2)^2\right) \cdot \left(\frac{\sigma_{z,zul}}{E} + 1\right)^2}}$$

Es sind $n = 26$ Drähte erforderlich.

Kontrolle der Spannung für ausgeführt $n = 26$ Drähte:

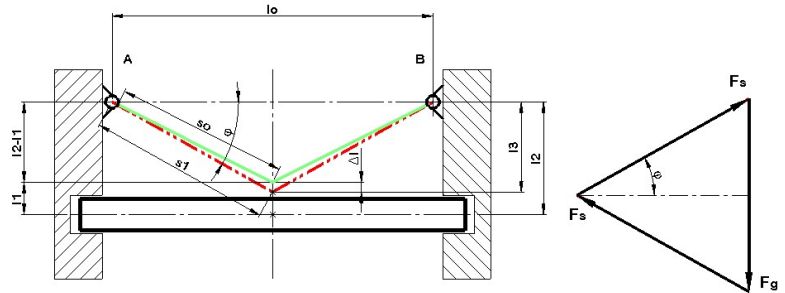
$$\sigma_{zv} := \frac{4 F_s}{n \cdot \pi \cdot d_1^2} \quad \sigma_{zv} = 98.96 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Absenkung Δl :

$$\Delta l = l_3 - (l_2 - l_1) \quad l_3 = \sqrt{s_1^2 - \frac{l_0^2}{4}} \quad l_3 = \sqrt{\left(1 + \frac{\sigma_{z,zul}}{E}\right)^2 \cdot \left(\frac{l_0^2}{4} + (l_2 - l_1)^2\right) - \frac{l_0^2}{4}}$$

$$\Delta l := \sqrt{\left(1 + \frac{\sigma_{z,zul}}{E}\right)^2 \cdot \left(\frac{l_0^2}{4} + (l_2 - l_1)^2\right) - \frac{l_0^2}{4}} - (l_2 - l_1)$$

Die Absenkung beträgt $\Delta l = 5.95 \text{ mm}$.



Zusatzaufgabe: Wie groß sind die Seilkräfte bei asymmetrischer Aufhängung und die Litzenanzahl der Drähte unter Einhaltung der zulässigen Zugspannung von $\sigma_{z,zul} = 100.00 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$? Welche Absenkung des Aufhängepunktes ergibt sich dann daraus?

Lösung:

Es ist:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta s_1}{s_{10}} \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_{z,zul}}{E} \quad \sigma_{z,zul} = \frac{4 F_{s1}}{n_1 \cdot \pi \cdot d_1^2} \quad \varepsilon_1 = \frac{4 F_{s1}}{E \cdot n_1 \cdot \pi \cdot d_1^2}$$

$$\frac{\Delta s_1}{s_{10}} = \frac{4 F_{s1}}{E \cdot n_1 \cdot \pi \cdot d_1^2} \quad \Delta s_1 = s_{10} \cdot \frac{4 F_{s1}}{E \cdot n_1 \cdot \pi \cdot d_1^2} \quad \text{Analog:} \quad \Delta s_2 = s_{20} \cdot \frac{4 F_{s2}}{E \cdot n_2 \cdot \pi \cdot d_1^2}$$

Geometrische Beziehungen des Seilzuges nach der Verformung:

$$\varphi_1 = \text{asin} \left(\frac{l_3}{\sqrt{l_4^2 + (l_2 - l_1)^2 + \Delta s_1}} \right) \quad \varphi_2 = \text{asin} \left(\frac{l_3}{\sqrt{(l_0 - l_4)^2 + (l_2 - l_1)^2 + \Delta s_2}} \right) \quad s_{10} := \sqrt{l_4^2 + (l_2 - l_1)^2} \quad s_{20} := \sqrt{(l_0 - l_4)^2 + (l_2 - l_1)^2}$$

$$n_1 = \frac{4 F_{s1}}{\sigma_{z,zul} \cdot \pi \cdot d_1^2} \quad n_2 = \frac{4 F_{s2}}{\sigma_{z,zul} \cdot \pi \cdot d_1^2}$$

$$\varphi_1 = \text{asin} \left(\frac{l_3}{\sqrt{l_4^2 + (l_2 - l_1)^2 + \Delta s_1}} \right) \quad (I) \quad \varphi_2 = \text{asin} \left(\frac{l_3}{\sqrt{(l_0 - l_4)^2 + (l_2 - l_1)^2 + \Delta s_2}} \right) \quad (II) \quad \text{Neigungswinkel nach der Verlängerung}$$

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{s1} \cdot \cos(\varphi_1) + F_{s2} \cdot \sin(\varphi_2) = 0 \quad (III) \quad \sum F_y = 0 \quad F_{s1} \cdot \sin(\varphi_1) + F_{s2} \cdot \cos(\varphi_2) - F_g = 0 \quad (IV) \quad \text{Statik}$$

$$\Delta s_1 = \sqrt{l_4^2 + (l_2 - l_1)^2} \cdot \frac{4 F_{s1}}{E \cdot n_1 \cdot \pi \cdot d_1^2} \quad (V) \quad \Delta s_2 = \sqrt{(l_0 - l_4)^2 + (l_2 - l_1)^2} \cdot \frac{4 F_{s2}}{E \cdot n_2 \cdot \pi \cdot d_1^2} \quad (VI) \quad \text{Dehnungen}$$

$$n_1 = \frac{4 F_{s1}}{\sigma_{z,zul} \cdot \pi \cdot d_1^2} \quad (VII) \quad n_2 = \frac{4 F_{s2}}{\sigma_{z,zul} \cdot \pi \cdot d_1^2} \quad (VIII) \quad \text{Anzahl der Drähte}$$

Geometrie des Seilzuges nach der Verformung:

$$p_1 + q_1 = l_0 \quad (IX) \quad \left(\sqrt{l_4^2 + (l_2 - l_1)^2} + \Delta s_1 \right)^2 = p_1^2 + l_3^2 \quad (X) \quad \left(\sqrt{(l_0 - l_4)^2 + (l_2 - l_1)^2} + \Delta s_2 \right)^2 = q_1^2 + l_3^2 \quad (XI)$$

Diese Gleichungen bilden ein Gleichungssystem mit 11 Gleichungen und 11 Unbekannten, welches mit dem Solver numerisch gelöst wird.

Schätzwerte

$$\varphi_1 := 20^\circ \quad \varphi_2 := 45^\circ \quad F_{s1} := 1000 \text{ N} \quad F_{s2} := 1000 \text{ N} \quad \Delta s_1 := 1 \text{ mm} \quad \Delta s_2 := 1 \text{ mm} \quad l_3 := 1 \text{ m} \quad n_1 := 20 \quad n_2 := 20$$

$$p_1 := 7 \text{ m} \quad q_1 := 3 \text{ m}$$

Nebenbedingungen

$$-F_{s1} \cdot \cos(\varphi_1) + F_{s2} \cdot \sin(\varphi_2) = 0 \quad F_{s1} \cdot \sin(\varphi_1) + F_{s2} \cdot \cos(\varphi_2) - F_g = 0 \quad \text{Statik}$$

$$\sigma_{z_{zul}} = \frac{E \cdot \Delta s_1}{\sqrt{l_4^2 + (l_2 - l_1)^2}} \quad \sigma_{z_{zul}} = \frac{E \cdot \Delta s_2}{\sqrt{(l_0 - l_4)^2 + (l_2 - l_1)^2}} \quad \text{Dehnungen (Formänderungsarbeit)}$$

$$\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{l_3}{\sqrt{l_4^2 + (l_2 - l_1)^2 + \Delta s_1}}\right) \quad \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{l_3}{\sqrt{(l_0 - l_4)^2 + (l_2 - l_1)^2 + \Delta s_2}}\right) \quad \text{Geometrie}$$

$$n_1 = \frac{4 F_{s1}}{\sigma_{z_{zul}} \cdot \pi \cdot d_1^2} \quad n_2 = \frac{4 F_{s2}}{\sigma_{z_{zul}} \cdot \pi \cdot d_1^2} \quad \text{erforderliche Anzahl der Drähte}$$

$$p_1 + q_1 = l_0 \quad \left(\sqrt{l_4^2 + (l_2 - l_1)^2 + \Delta s_1}\right)^2 = p_1^2 + l_3^2 \quad \left(\sqrt{(l_0 - l_4)^2 + (l_2 - l_1)^2 + \Delta s_2}\right)^2 = q_1^2 + l_3^2 \quad \text{Geometrie des Seilzuges nach der Verformung}$$

Gleichungslöser

$$\begin{bmatrix} F_{s1} \\ F_{s2} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ n_1 \\ n_2 \\ l_3 \\ p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} := \text{find}(F_{s1}, F_{s2}, \varphi_1, \varphi_2, \Delta s_1, \Delta s_2, n_1, n_2, l_3, p_1, q_1)$$

$$F_{s1} = 1434.30 \text{ N} \quad F_{s2} = 1921.27 \text{ N} \quad \varphi_1 = 18.46^\circ \quad \varphi_2 = 45.08^\circ \quad \Delta s_1 = 3.76 \text{ mm} \quad \Delta s_2 = 1.68 \text{ mm} \quad n_1 = 18.3 \quad n_2 = 24.5$$

$$l_3 = 2504.76 \text{ mm} \quad p_1 = 7502.38 \text{ mm} \quad q_1 = 2497.62 \text{ mm}$$

Kontrolle der Seilspannungen nach der Verformung:

Ausgeführt sind: $n_1 := 20$ und $n_2 := 25$ Drähte.

$$\sigma_{z1_Vorh} := \frac{4 F_{s1}}{n_1 \cdot \pi \cdot d_1^2} = 91.31 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_{z2_Vorh} := \frac{4 F_{s2}}{n_2 \cdot \pi \cdot d_1^2} = 97.85 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Absenkung des Aufhängepunktes:

$$\Delta y := l_3 - (l_2 - l_1) = 4.76 \text{ mm}$$

