MP-288 - Exercises on Optimality Necessary Conditions I

Prof.: Rafael T. L. Ferreira

Aluno : Guilherme de Aquino Pereira Nunes

1) Find candidate optimum points for the function $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$. Classify them as maximum or minimum.

$f(x) := x^3 - x^2 - 4\cdot x + 4$

Primeira derivada:

$f'(x) := \frac{d}{dx}f(x) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}f(x) = 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 4$

Solução da primeira derivada:

$$\text{Extremes} := 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 4 = 0 \text{ solve } = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{13}}{3} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3} \end{pmatrix}$$

Teste para verificar segunda derivada:

$f''(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x) = 6\cdot x - 2$

Substituimos os valores de raiz na segunda derivada:

$$\overrightarrow{f''(\text{Extremes})} = \begin{pmatrix} 7.2 \\ -7.2 \end{pmatrix}$$

Ou seja, o primeiro extremo é um ponto de mínimo local pois a segunda derivada é positiva, enquanto que o segundo é um ponto de máximo local pois a segunda derivada é negativa.

2) Using optimality necessary conditions, find stationary points and evaluate their quality for the function $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x^2 - 2x_1 + x_2 + 8$.

Definimos a função:

$$f(x_1, x_2) := x_1^{\,2} + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2^{\,2} - 2 \cdot x_1 + x_2 + 8$$

Calculamos o gradiente:

$$G'(x_1, x_2) := \nabla_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 2 \\ 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 1 \end{pmatrix}$$

Encontramos os valores de x^*_1 e x^*_2 para que o gradiente seja nulo :

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot x^*_1 + 2 \cdot x_2 - 2 \\ 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como o problema é linear, podemos resolver o sistema a seguir :

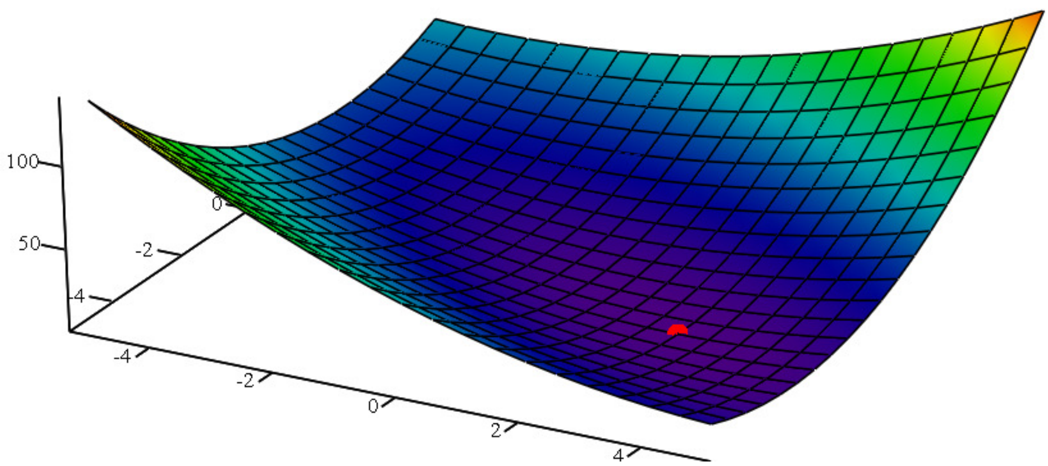
$$\begin{pmatrix} x^*_1 \\ x^*_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Assim :

$$\begin{pmatrix} x^*_1 \\ x^*_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

Plotando o ponto ótimo no gráfico temos:

$X := (x^*_1)$ $\qquad$ $Y := (x^*_2)$ $\qquad$ $Z := (f(x^*_1, x^*_2))$



f,(X,Y,Z)

Verificamos se é um ponto de máximo ou mínimo local através da matriz Hessiana :

$$H(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx_1^2} f(x_1, x_2) & \frac{d}{dx_1}\frac{d}{dx_2} f(x_1, x_2) \\ \frac{d}{dx_1}\frac{d}{dx_2} f(x_1, x_2) & \frac{d^2}{dx_2^2} f(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$H' := H(x^*_1, x^*_2)$$

$$H' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos os autovalores da matriz:

$$\text{eigenvals}(H') = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 5.2 \end{pmatrix}$$

Vemos que todos os autovalores da matriz são positivos, logo a matriz é positiva definida e o ponto é um ponto de mínimo. Podemos verificar esta condição no gráfico.

---

3) Using optimality necessary conditions, find stationary points and evaluate their quality for the function $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9$.

Definimos a função:

$$f(x, y, z) := 2\cdot x^2 + x\cdot y + y^2 + y\cdot z + z^2 - 6\cdot x - 7\cdot y - 8\cdot z + 9$$

Calculamos o gradiente:

$$\nabla_{x,y,z} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4\cdot x + y - 6 \\ x + 2\cdot y + z - 7 \\ y + 2\cdot z - 8 \end{pmatrix}$$

Encontramos os valores de x^* , y^* e z^* para que o gradiente seja nulo :

$$\begin{pmatrix} 4\cdot x^* + y^* - 6 \\ x^* + 2\cdot y^* + z^* - 7 \\ x^* + 2\cdot z^* - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como o problema é linear, podemos resolver o sistema a seguir :

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Assim :

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3.3 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

Verificamos se é um ponto de máximo ou mínimo local através da matriz Hessiana :

$$H(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2}f(x,y,z) & \frac{d}{dx}\frac{d}{dy}f(x,y,z) & \frac{d}{dx}\frac{d}{dz}f(x,y,z) \\ \frac{d}{dy}\frac{d}{dx}f(x,y,z) & \frac{d^2}{dy^2}f(x,y,z) & \frac{d}{dy}\frac{d}{dz}f(x,y,z) \\ \frac{d}{dz}\frac{d}{dx}f(x,y,z) & \frac{d}{dz}\frac{d}{dy}f(x,y,z) & \frac{d^2}{dz^2}f(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$H' := H(x^*, y^*, z^*)$$

$$H' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos os autovalores da matriz:

$$\mathrm{eigenvals}(H') = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0.8 \\ 2.7 \end{pmatrix}$$

Vemos que todos os autovalores da matriz são positivos, logo a matriz é positiva definida e o ponto é um ponto de mínimo.

4) Find stationary points for the problem:

$$\min_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) = 4x_1^2 + 9x_2^2 - 4x_1 + 6x_2 + 13$$
$$\text{s.t.: } h(x_1,x_2) = x_1 - 3x_2 + 3 = 0$$

Use optimality necessary conditions. Plot the functions and check the solutions found. Plot the gradients at the solution and show their relationship with the Lagrange multiplier value.

$$f(x_1,x_2) := 4\cdot x_1^{\,2} + 9\cdot x_2^{\,2} - 4\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 13$$

$$h(x_1,x_2) := x_1 - 3\cdot x_2 + 3 \;\; = 0$$

Para satisfazer a equação h, temos:

$$x_1(x_2) := 3\cdot x_2 - 3$$

Plotando a curva para x_1 e x_2 restringidos e o valor da função f, temos:

Primeiramente definimos pontos discretos :

$$i := 1..20$$

$$j_{1,i} := -2 + \frac{8}{30}\cdot i$$

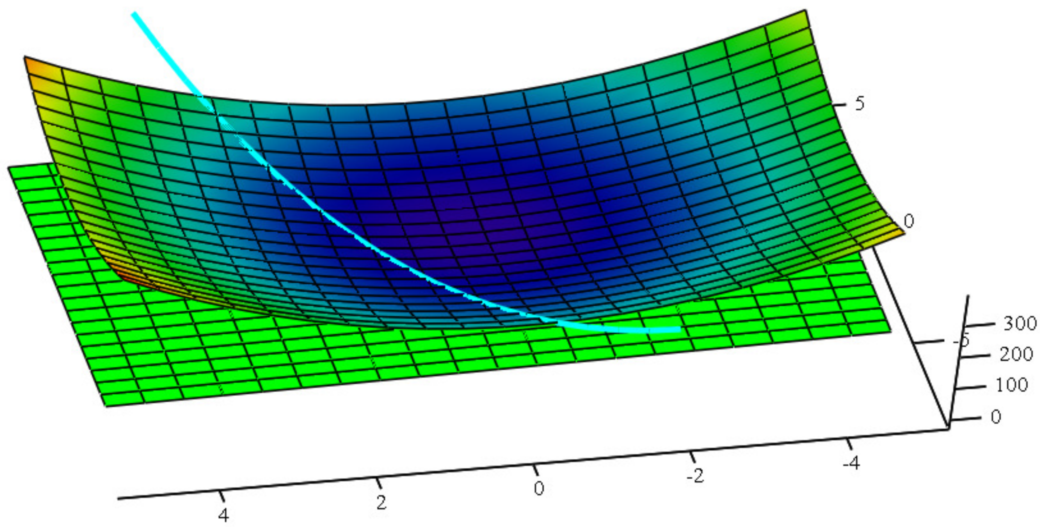
Definimos a curva onde deve ser feito a analise de otimização :

$$c_{x_i} := x_1(j_{1,i})$$

$$c_{y_i} := j_{1,i}$$

$$c_{z_i} := f(x_1(j_{1,i}), j_{1,i})$$

$$f_h := \begin{pmatrix} c_x^{\,T} \\ c_y^{\,T} \\ c_z^{\,T} \end{pmatrix}$$



f, h, f_h

Substituimos a equação de h_2 da funçào f

:

$g(x_2) := 4\cdot(x_1(x_2))^2 + 9\cdot x_2{}^2 - 4\cdot(x_1(x_2)) + 6\cdot x_2 + 13$

$g(x_2) = 45\cdot x_2{}^2 - 78\cdot x_2 + 61$

Agora o processo de otimização é simples:

$$g'(x_2) := \frac{d}{dx_2} g(x_2)$$

$$g'(x_2) = 90 \cdot x_2 - 78$$

Igualando a zero:

$$x^*_2 = g'(x_2) = 0 \text{ solve } = \frac{13}{15} \qquad x^*_2 = 0.9$$

Verificando a segunda derivada :

$$g''(x_2) := \frac{d^2}{dx_2^{\,2}} g(x_2)$$

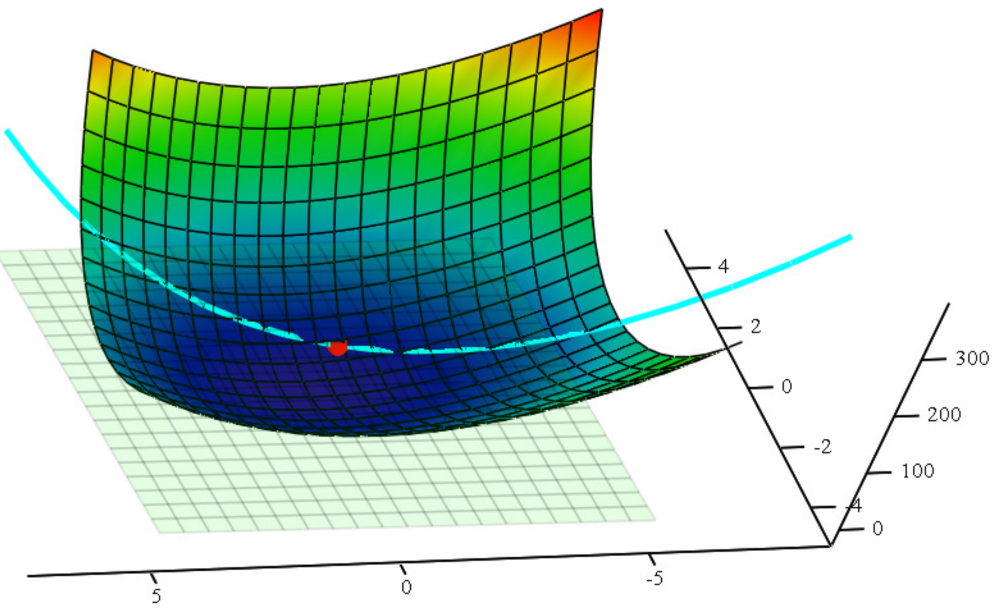
$$g''(x^*_2) = 90$$

Como a segunda derivada é positiva, o ponto é de mínimo. Calculamos o valor do ponto mínimo.

$$f(x_1(x^*_2), x^*_2) = 27.2$$

Plotando o ponto no gráfico

$$X := (x_1(x^*_2)) = (-0.4) \qquad Y := (x^*_2) = (0.9) \qquad Z := (f(x_1(x^*_2), x^*_2)) = (27.2)$$



$f, h, f_h, (X, Y, Z)$

Resolvendo o mesmo exercicio atraves do Lagrange :

Definimos o operador Langrangeano :

$$L(x_1, x_2, u) := f(x_1, x_2) + u \cdot h(x_1, x_2)$$

$$G'(x_1, x_2, u) := \nabla_{x_1, x_2, u} L(x_1, x_2, u) = \begin{pmatrix} u + 8 \cdot x_1 - 4 \\ 18 \cdot x_2 - 3 \cdot u + 6 \\ x_1 - 3 \cdot x_2 + 3 \end{pmatrix}$$

$$X^* := G'(x_1, x_2, u) \text{ solve}, x_1, x_2, u \; = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{13}{15} & \frac{36}{5} \end{pmatrix}$$

$$X^* = (-0.4 \quad 0.9 \quad 7.2)$$

$$f\left(X^{*\langle 1 \rangle}, X^{*\langle 2 \rangle}\right) = (27.2)$$

A solução encontrada é a mesma que a anterior.

Plotando o gradiente no ponto de mínimo temos:

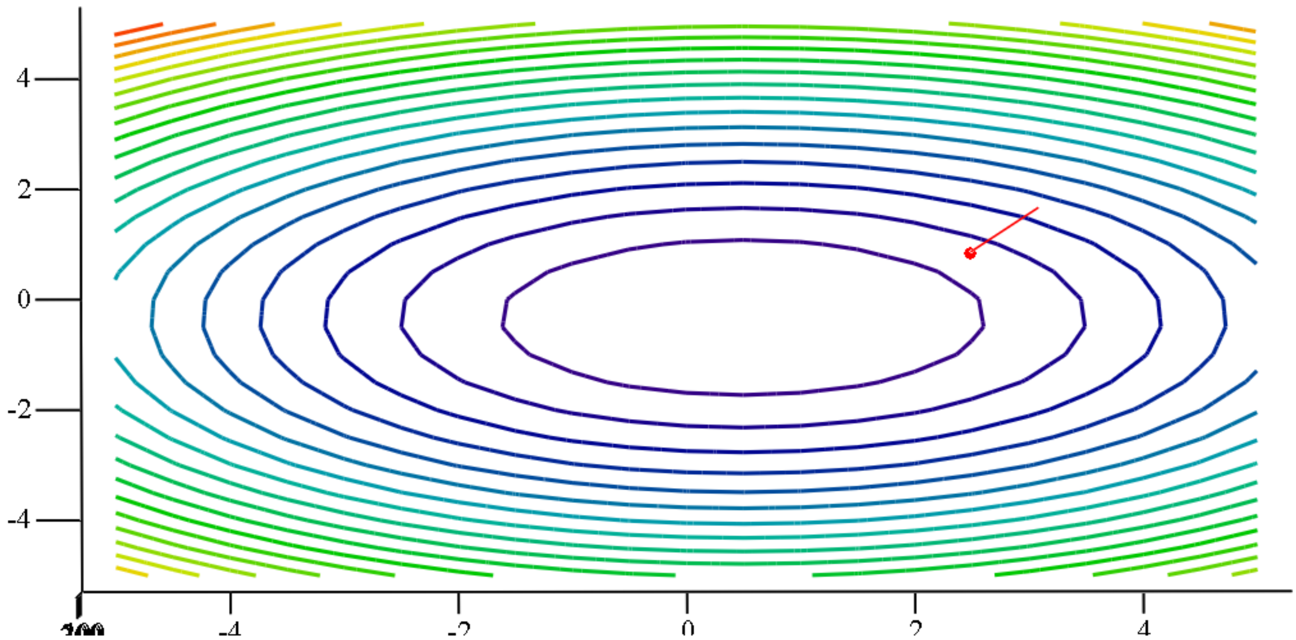
$$\text{scale} := \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{dx^*_1} f(x^*_1, x^*_2)\right)^2 + \left(\frac{d}{dx^*_2} f(x^*_1, x^*_2)\right)^2}}$$

$$X_v := \left(x^*_1 \quad x^*_1 + \frac{d}{dx^*_1} f(x^*_1, x^*_2) \cdot \text{scale}\right) \qquad X_p := (x^*_1)$$

$$Y_v := \left(x^*_2 \quad x^*_2 + \frac{d}{dx^*_2} f(x^*_1, x^*_2) \cdot \text{scale}\right) \qquad Y_p := (x^*_2)$$

$$Z_v := \left(f(x^*_1, x^*_2) \quad f(x^*_1, x^*_2)\right) \qquad Z_p := \left(f(x^*_1, x^*_2)\right)$$

$$(X_v, Y_v, Z_v) \qquad (X_p, Y_p, Z_p)$$



$f, (X_v, Y_v, Z_v), (X_p, Y_p, Z_p)$

5) Consider a cylindrical tank whose cross section radius is R and height is H. Using optimality necessary conditions, find optimal R^*, H^* which minimize the external surface area of the tank while keeping its volume V equal to a predefined value $\bar{V}$.

Plot the functions and check the solutions found. Plot the gradients at the solution and show their relationship with the Lagrange multiplier value. Draw a cylinder with the optimal aspect ratio found.

Definimos o problema matematicamente através das funções:

$$\mathrm{Area}(R,H) := 2\cdot\pi\cdot R\cdot H + 2\cdot\left(\pi\cdot R^2\right)$$

$$\mathrm{Volume}(R,H) := \pi\cdot R^2\cdot H$$

Definimos um valor arbitrário para V' :

$$V' := 25$$

Podemos escrever a função h :

$$h(R,H) := V' - \pi\cdot R^2\cdot H$$

Definimos o Lagrangiano :

$$L(R,H,v) := \mathrm{Area}(R,H) + v\cdot h(R,H)$$

Calculamos o gradiente :

$$G'(R,H,v) := \nabla_{R,H,v} L(R,H,v) = \begin{pmatrix} 2\cdot\pi\cdot H + 4\cdot\pi\cdot R - 2\cdot\pi\cdot H\cdot R\cdot v \\ 2\cdot\pi\cdot R - \pi\cdot R^2\cdot v \\ 25 - \pi\cdot H\cdot R^2 \end{pmatrix}$$

Igualamos o gradiente a zero e resolvemos o sistema não linear, temos :

Para resolver o sistema, começamos com a segunda equação e definimos v em função de R :

$$2\cdot\pi\cdot R - \pi\cdot R^2\cdot v = 0$$

$$v = \frac{2}{R}$$

Substituímos na primeira equação :

$$2\cdot\pi\cdot H + 4\cdot\pi\cdot R - 2\cdot\pi\cdot H\cdot R\cdot v = 0$$

$$2\cdot\pi\cdot H + 4\cdot\pi\cdot R - 2\cdot\pi\cdot H\cdot R\cdot\frac{2}{R} = 0$$

$$H + 2\cdot R - H\cdot 2 = 0$$

$$2\cdot R = H$$

$$H = 2\cdot R$$

Finalmente substituimos o valor de H na terceira equação :

$$25 - \pi\cdot H\cdot R^2 = 0$$

$$25 - \pi\cdot(2\cdot R)\cdot R^2 = 0$$

$$2\cdot\pi\cdot R^3 = 25$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{25}{2\cdot\pi}}$$

Assim, temos os valores ótimos :

$$R^* := \sqrt[3]{\frac{25}{2\cdot\pi}}$$

$$H^* := 2\cdot R^*$$

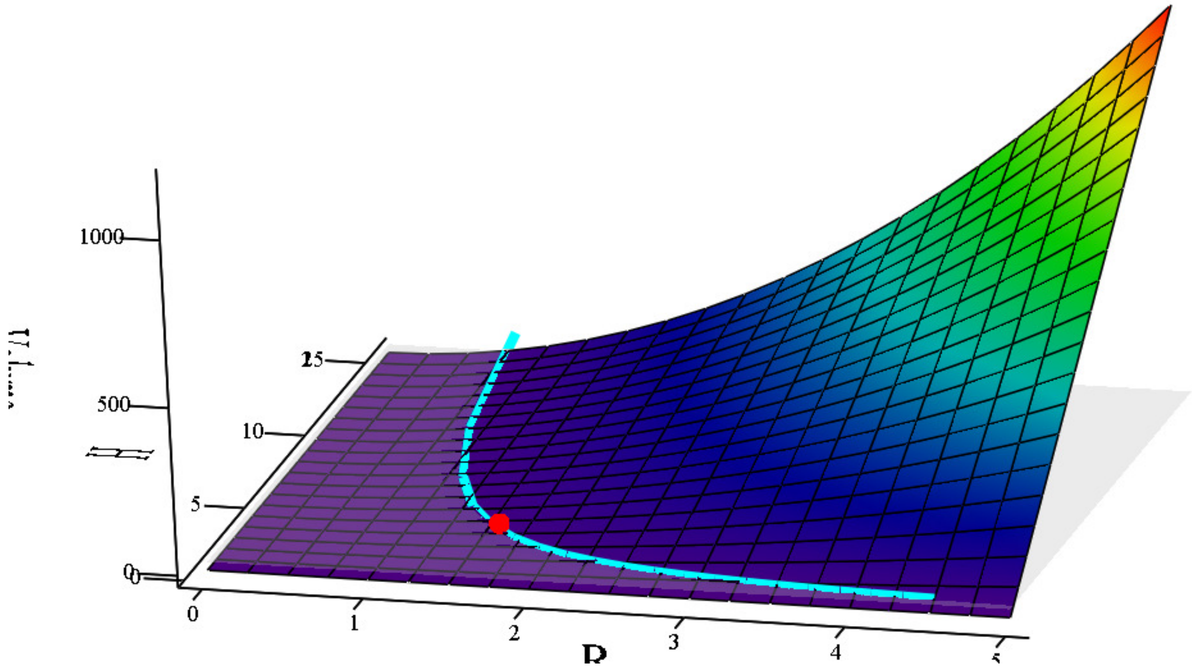
$$v := \frac{2}{R^*} = 1.3$$

Verificando a área e o volume, temos:

$\mathrm{Volume}(R^*,H^*) = 25$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{Area}(R^*,H^*) = 47.3$

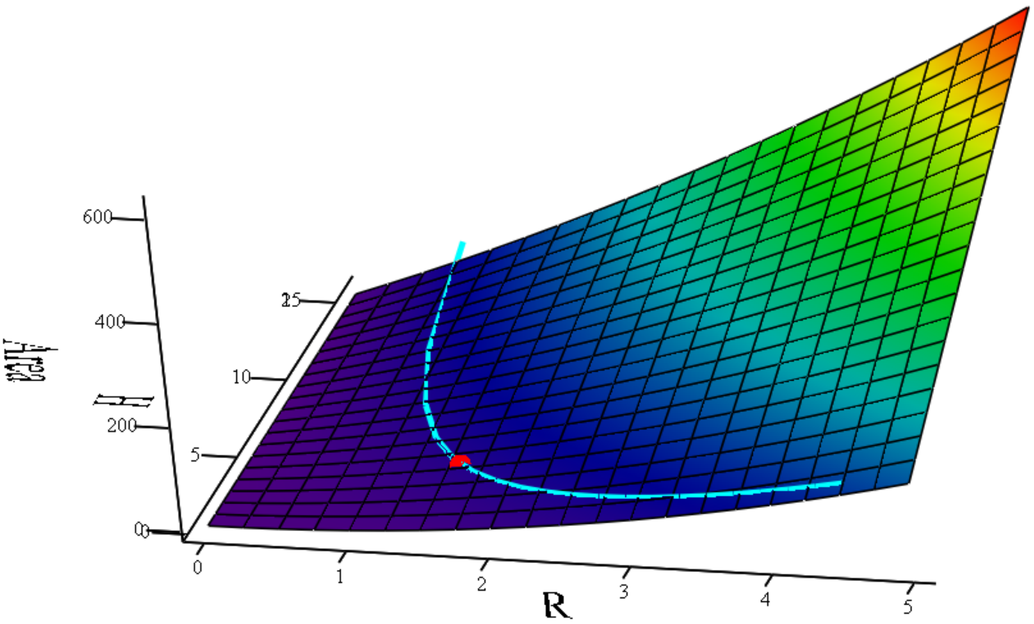
Plotamos as funções de volume e área e o ponto de mínimo encontrado :

Volume



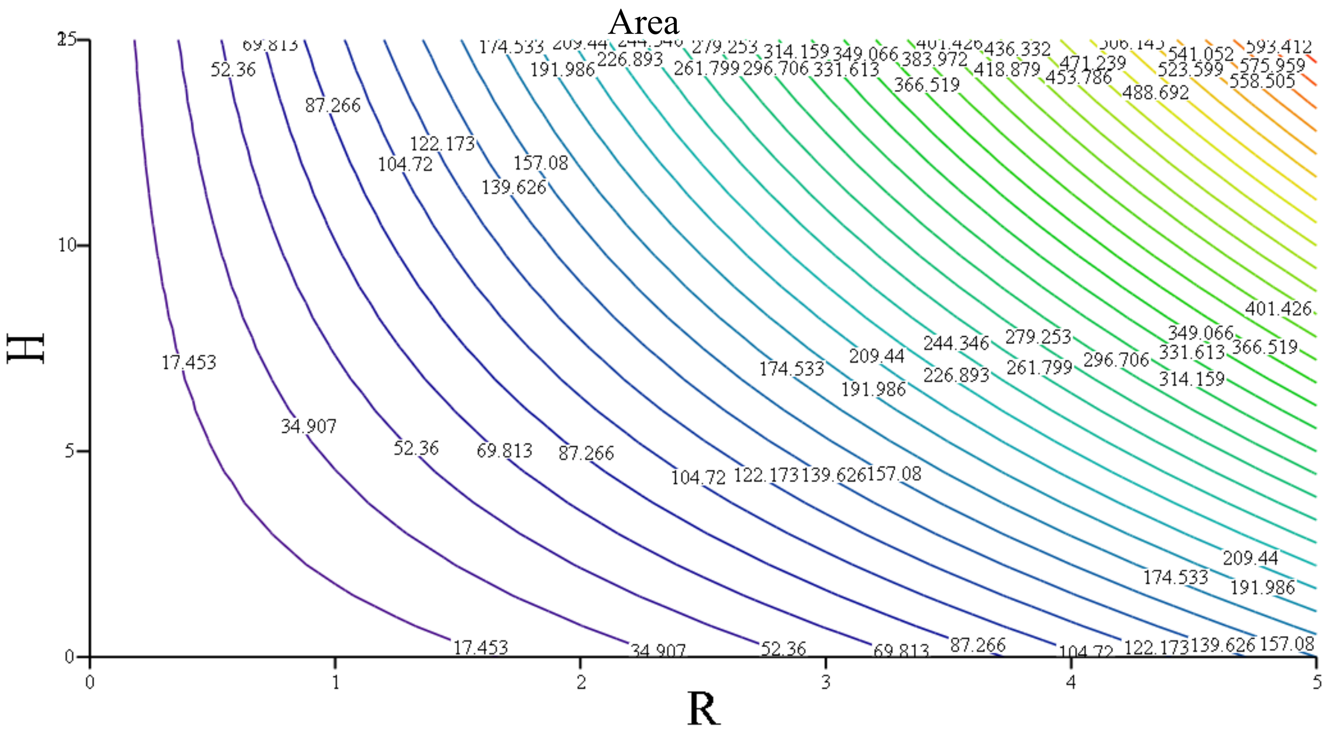
Volume, V", $V_{IntersecRH}$, (X_p, Y_p, Z_p)

Area

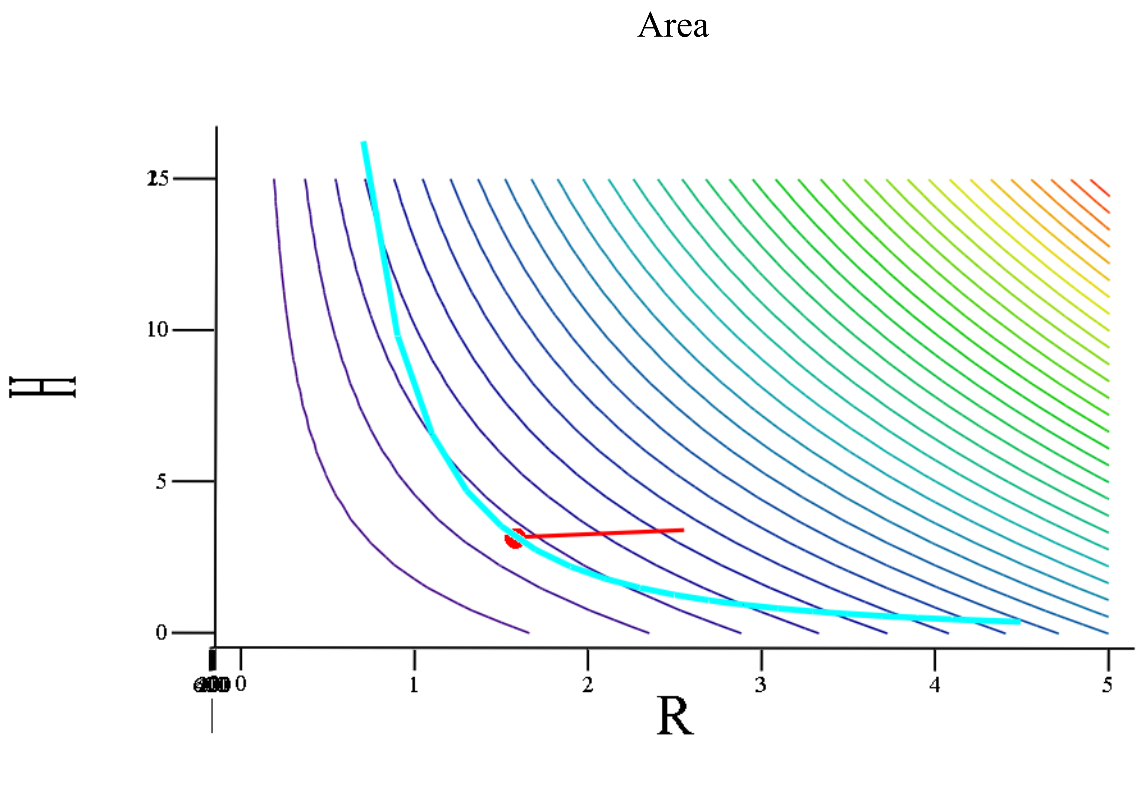


Area, $A_{IntersecRH}$, (X_p, Y_p, Z_p), (X_v, Y_v, Z_v)

Plotamos também o gráfico contour e o gradiente :

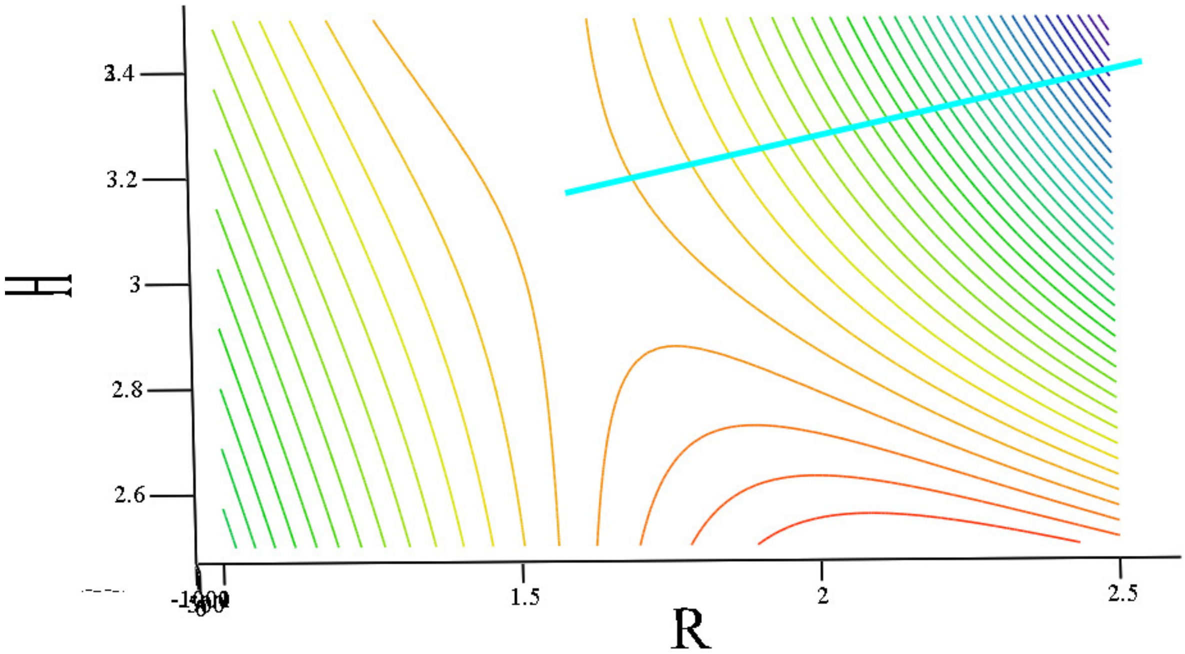


Area



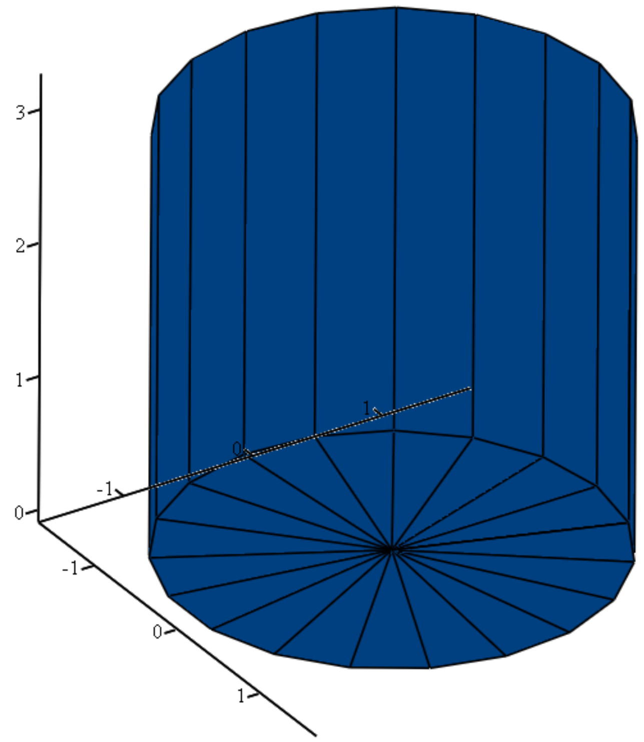
$$\text{Area}, A_{\text{IntersecRH}}, (X_p, Y_p, Z_p), (X_v, Y_v, Z_v)$$

A relação entre o termo de Lagrange v e o gradiente :



$$L', \left[X_V, Y_V, (-1000 \quad -1000)\right]$$

Desenhando a figura geometrica do cilindro :



C